Control 6 MA–11A 1999

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

P1.– Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_3 + x_1 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

(i) (3 ptos.) Calcular bases del $Ker(T)$ y de $Im(T)$. Es T inyectiva ? Es T sobreyectiva ?
(ii) (3 ptos.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

respectivamente.

P2.–

(2.1) (3 ptos.) Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. De una base ortonormal de vectores propios de A.

(2.2) (3 ptos.) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, donde a es un parámetro real. Calcule los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es diagonalizable.

P3.–

(i) (1.5 ptos.) Sea $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Se sabe que A es simétrica y que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio 2, y además la dimensión del $Ker(T)$ es igual a 2. Calcular A.

(ii) (1.5 ptos.) Sea $L : M_{n\times n}(I\!R) \to I\!R$ una transformación lineal. Probar que existe una matriz $B \in M_{n\times n}(I\!R)$ tal que para toda $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ se tiene

$$L(A) = \sum_{i=1}^{n} (B \cdot A)_{i,i}$$

(iii) (1.5 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ una matriz simétrica tal que para todo $x \in I\!R^n$ se tiene $< Ax, x > \geq 0$. Probar que los valores propios de A son todos reales mayores o iguales que cero.

(iv) (1.5 ptos.) Sea $T : M_{n\times n}(I\!R) \to M_{n\times n}(I\!R)$ la transformación lineal definida en cada $M \in M_{n\times n}(I\!R)$ por $T(M) = A \cdot M$, donde $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ es una matriz fija. Probar que T es un isomorfismo sí y sólo sí A es invertible.

Tiempo: 3 horas.