U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #6 MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

4 de noviembre de 2004

P1.- Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) (1.5 ptos.) Muestre que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 36).$$

b) (3 ptos.) Encuentre una base ortonormal de vectores propios de A y explicite matrices P invertible y D diagonal (de 3×3) tales que $A = PDP^t$.

c) (0.5 ptos.) ¿Es A invertible? (Justifique).

d) (1 pto.) Determine cuáles de las siguientes matrices C son similares a A, es decir, cumplen $A = QCQ^{-1}$ para alguna matriz Q invertible:

$$i) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad ii) \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Justifique.

P2.- Denotemos por $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 2 y sea β la base canónica $\{1, x, x^2\}$ de este espacio. Considere

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (2.5 ptos.) Encuentre la base β' de $\mathcal{P}_2$ tal que Q sea representante de la identidad de $\mathcal{P}_2$ con β' en $\mathcal{P}_2$ con β. Si le sirve, en términos de coordenadas

$$[p]_\beta = Q\ [p]_{\beta'} \qquad \forall p \in \mathcal{P}_2.$$

b) (2.5 ptos.) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases β en $\mathcal{P}_2$ y canónica en $\mathbb{R}^3$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz representante de T con respecto las bases β' en $\mathcal{P}_2$ y canónica en $\mathbb{R}^3$, donde β' es la base encontrada en a).

c) (1 pto.) Calcule $\dim \ker T$ y el rango de T.

P3.- a) Sea A una matriz de $n \times n$, $n \geq 3$ con coeficientes reales tal que $\dim \ker A \leq 2$ y su polinomio característico $p(\lambda)$ tiene la forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 q(\lambda),$$

donde $q(\lambda)$ es un polinomio.

i) (2 ptos.) Pruebe que $\dim \ker A \geq 1$ y que el rango de A es menor o igual a $n - 1$.

ii) (2 ptos.) Demuestre que A no es diagonalizable.

b) (2 ptos.) Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal. Pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.

TIEMPO: 3 HORAS