Control 6 MA11A ÁLGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
3 de Noviembre de 2005

Pregunta 1.

a) (4,5 ptos.) Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dé matrices P y D tales que $A = PDP^t$.

b) (1,5 ptos.) Sean $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si A es la matriz de la parte a) responda justificando apropiadamente :

¿Existe Q invertible tal que $A = QBQ^{-1}$?

¿Existe Q invertible tal que $A = QCQ^{-1}$?

¿Existe Q invertible tal que $B = QCQ^{-1}$?

Pregunta 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(en el espacio de partida y en el de llegada) sea

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (4 ptos.) Encuentre la matriz N representante de T con respecto a la base canónica (en el espacio de partida y en el de llegada).

b) (1 pto.) ¿Existen bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tales que la representante de T con respecto a $\mathcal{B}_1$ en la partida y $\mathcal{B}_2$ en la llegada sea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$? Justifique.

c) (1 pto.) Pruebe que M no es diagonalizable y concluya que N tampoco lo es (justifique).

Pregunta 3.

a) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

i) (1 pto.) Verifique que

$$Im(T^2) \subseteq Im(T) \quad \text{y} \quad Ker(T^2) \supseteq Ker(T).$$

($Ker(T)$ es lo mismo que el núcleo de T. $T^2 = T \circ T$.)

ii) (2 ptos.) Demuestre que

$$Im(T^2) = Im(T) \implies Ker(T^2) = Ker(T).$$

Ind.: le puede servir el teorema núcleo imagen.

b) Sean A, B matrices de $n \times n$ con coeficientes reales tales que $AB = BA$.

i) (1 pto.) Pruebe que si $Bv \neq 0$ y v es vector propio de A asociado a λ entonces Bv también lo es.

ii) (1 pto.) Suponiendo que los valores propios de A son distintos entre sí, muestre que si v es vector propio de A entonces v es vector propio de B.

iii) (1 pto.) Concluya que si los valores propios de A son distintos entre sí entonces B es diagonalizable.

TIEMPO: 3 horas.