Control 6 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
4 de Noviembre de 2006

P1. a) Considere las funciones lineales f y g tales que

$$f: \quad M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{array}{rl} g: & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & x \to g(x) = \end{array} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz representante de la función f con respecto a las bases B_1 en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y B_2 en $\mathbb{R}^3$.

i) (2 ptos.) Encuentre la matriz representante B de la función g con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

ii) (4 ptos.) Obtenga la matriz representante de $g \circ f$ (g compuesto con f) con respecto a la base B_1 en $M_{2,2}(\mathbb{R})$ y a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

P2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 12 & -10 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & 12 & -36 \\ 12 & -4 & -12 & -14 & 0 & 12 \\ 24 & 4 & -24 & -16 & 6 & -12 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se sabe que A es diagonalizable y que sus valores propios son -6 y 6.

i) (3.0 ptos.) Encontrar una base del subespacio propio asociado a $\lambda = -6$ (es decir base de $Ker(A + 6I)$) y determinar las dimensiones de los subespacios propios asociados a ambos valores propios.

ii) (0.8 ptos.) Encontrar una matriz diagonal D similar a A, es decir, $A = PDP^{-1}$ con P invertible.

iii) (0.7 ptos.) Determinar el polinomio característico de A, es decir $p(\lambda)$.

iv) (0.7 ptos.) Explique porqué A es invertible.

v) (0.8 ptos.) Encontrar una matriz diagonal $\tilde{D}$ similar a A^{-1}, es decir $A^{-1} = P\tilde{D}P^{-1}$ con P invertible.

P3. i) (2.0 ptos.) Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y A invertible.

Muestre que si λ es valor propio de BA, entonces λ es valor propio de AB.

ii) (2.0 ptos.) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable y tal que $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$. Encuentre A (Justifique).

iii) (2.0 ptos.) Sean A y B dos matrices diagonalizables en $M_{n,n}(\mathbb{R})$ con la misma base de vectores propios $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los respectivos valores propios de A y $u_1, u_2, ..., u_n$ son los respectivos valores propios de B, es decir $Av_i = \lambda_i v_i, \quad Bv_i = \mu_i v_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, se pide encontrar los valores propios de la matriz $A^3 + 2B$.

TIEMPO: 3 HRS.