MA-11A Álgebra **9 de Agosto, 2001**

Control Recuperativo

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Muestre que el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z - \mathbb{R}e(z)| = (\mathbb{I}m(z))^2$, es la unión de tres rectas paralelas del plano cartesiano (dibújelas).

(ii).- Sean $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tales que $P(X) = P_0 + P_1 X$ y Q es un polinomio mónico de grado 2 y raíces α y β tales que $\alpha \neq \beta$.

(ii.1).- (2.5 pts) Pruebe que existen $A, B \in \mathbb{C}$ tales que para todo $X \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$,

$$\frac{A}{X-\alpha} + \frac{B}{X-\beta} = \frac{P(X)}{Q(X)}.$$

Indicación: Asuma que las constantes A y B existen y calcúlelas en función de α, β, P_0 y P_1.

(ii.2).- (0.5 pts) Muestre que (ii.1) no necesariamente se satisface si $\alpha = \beta$.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Probar por inducción que si $n \geq 0$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{j=0}^{n} (j+1) a_j$.

(ii).- (3.0 pts) Pruebe por inducción que $\forall n \geq 0$, si $m \geq k \geq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$,

donde $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$ o $b < 0$. (Observar que con esta convención, la anterior sumatoria tiene un número finito de términos no nulos.)

Indicación: Use (sin demostrarlo) que $\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$.

PROBLEMA 3: Sea $(G, *)$ grupo con neutro e tal que G es finito.

(i).- (2.0 pts) Para $h \in G$ cualesquiera, pruebe que $f : \mathbb{N} \to G$ tal que $f(n) = h^n = \overbrace{h * \ldots * h}^{n \text{ veces}}$ $(h^0 = e)$ no es inyectiva. Concluya que $\exists m > 0$ tal que $h^m = e$.

(ii).- Sea $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ tal que si $h, h' \in H$, entonces $h * h' \in H$.

(ii.1).- (2.0 pts) Pruebe que si $h \in H$, entonces $h^{-1} \in H$.

(ii.2).- (2.0 pts) Concluya que H es subgrupo de G.