MA-11A Algebra **4 de Agosto, 2000**

Control Recuperativo

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.5 pts) Probar por inducción que para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) a_i \,,$$

y deducir, sin hacer uso de inducción, que si $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$, entonces $\sum_{k=1}^{n} H_k \;=\; (n+1)H_n - n\,.$

(ii).- (2.5 pts) Probar, sin usar inducción, que para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)k! \;=\; n(n+1)!\,.$

PROBLEMA 2:

(i).- (2.0 pts) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Muestre que todas las soluciones de $|z| = |z - \alpha|$ pertenecen a una misma recta del plano cartesiano (dibújela).

(ii).- (2.0 pts) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Encuentre todas las soluciones de $\left(\frac{z+1}{z}\right)^n \;=\; 1\,.$

(iii).- (2.0 pts) Sabiendo que el polinomio

$$P(z) \;=\; 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1 \;\in \mathbb{C}[z]\;,$$

tiene una raíz real a, determine alguna de las raíces de $P(z)$.

<u>Indicación</u>: Estudie la parte real y la parte imaginaria de $P(a)$.

PROBLEMA 3:

Sea $(G, *)$ grupo no necesariamente abeliano con neutro e.
Para $a \in G$, se define la función $f_a\colon G \to G$ tal que $f_a(x) = a * x * a^{-1}$.

(i).- (2.0 pts) Pruebe que $f_e = id_G$ y que para todo $a, b \in G$, $f_{a*b} = f_a \circ f_b$.

(ii).- (2.0 pts) Pruebe que para todo $a \in G$, f_a es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$ cuyo inverso es $f_{a^{-1}}$.

(iii).- (2.0 pts) Pruebe que si $Z(G) = \{a \in G \,:\, f_a = id_G\}$, entonces $(Z(G), *)$ es subgrupo de $(G, *)$ y que

$$a \in Z(G) \iff \forall x \in G\,,\; a * x = x * a\,.$$