Fecha: 8 de agosto del 2002
Tiempo: 3 horas

Control Recuperativo MA-11A Álgebra

1. Sea $(H, +)$ subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ con $H \neq \{0\}$.

   (a) (0.5 ptos) Pruebe que $\{h \in H |\ h > 0\} \neq \phi$.

   (b) (1.5 ptos) Considere $d = \min\{h \in H |\ h > 0\}$. Se define el conjunto
   $$d\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} |\ (\exists k \in \mathbb{Z})\ x = dk\}.$$
   Demuestre que $d\mathbb{Z} \subseteq H$.

   (c) (2 ptos) Sea $h \in H$ con $h > 0$. Demuestre que $h = dq$ para algún $q > 0$.
   Indicación Puede usar el Teorema de la División:
   $(\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0)(\exists! q, r \in \mathbb{N})\ 0 \leq r < b\ \wedge\ a = qb + r$.

   (d) (2 ptos) Concluya que $H = d\mathbb{Z}$.

2. (a) (3 ptos) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

   (b) (3 ptos) Sea $p(x)$ un polinomio mónico de grado 2 con coeficientes reales. Demuestre que
   $$p(x) \text{ tiene una raíz en } (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \text{ de módulo } 1$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$p(x) = x^2 + \alpha x + 1 \text{ con } \alpha \in]-2, 2[$$

3. (a) Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$$
   Sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario.

   i. (1.5 ptos) Demuestre que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|}(z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

   ii. (1.5 ptos) Concluya que
   $$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$$

   (b) i. (1.5 ptos) Sea $r \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Sea $q = r^2$. Demuestre que
   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{r^n(r^{n+1} - r^{-n-1})}{r - r^{-1}}$$

   ii. (1.5 ptos) Concluya que, si $\theta \in \mathbb{R}$ y si $\sin(\theta) \neq 0$, entonces:
   $$\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Sin consultas.