Control Recuperativo 1 MA11A Algebra

Agosto 1996

P1.- (a) Sean A, B conjuntos.

(i) (1.5 ptos.) Probar que, $B = A \triangle B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset \ \wedge \ B \setminus A = B$.
(ii) (1.5 ptos.) Probar que, $B = A \triangle B \Leftrightarrow A = \emptyset$.

(b) Probar por inducción que
(i) (1.5 ptos.) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, 6 divide a $n^3 + 5n$.
(ii) (1.5 ptos.) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

P2.- (a) Sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathbb{R}$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y = y^2 + x$.

(i) (1.5 ptos.) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.
(ii) (1.5 ptos) Probar que la clase de equivalencia de un real a es $\{a, 1 - a\}$.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$ que $f \circ f(x) = x + 1$.

(i) (2 ptos.) Probar que f es una función biyectiva.
(ii) (1 pto.) Probar que f no es un homomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$.

P3.- (a) (3 ptos.) Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la propiedad $\forall\, a, b \in G$, $(a * b)^2 = a^2 * b^2$. Probar que $(G, *)$ es un grupo Abeliano.

(b) (3 ptos.) Sean $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax + b\}$ y $\bar{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\, b \in \mathbb{R}, f(x) = x + b\}$. Sabiendo que $(G, \circ)$ es un grupo, probar que $(\bar{G}, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.