Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Control Recuperativo 1 ALGEBRA MA–11A

P1.–

(a) (3 ptos.) Sea $f : I\!N \to I\!N$ una función creciente (es decir, $\forall\ n, m \in I\!N,\ n \leq m \ \Rightarrow f(n) \leq f(m)$) y biyectiva. Probar que $\forall\ n \in I\!N,\ f(n) = n$.

(b) (3 ptos.) Sea $\mathcal{P}_F(I\!N) = \{A \subseteq I\!N \ / \ A$ es finito y $A \neq \emptyset\}$ y considere $f : \mathcal{P}_F(I\!N) \to I\!N$ definida por $f(A) = \sum\limits_{i \in A} i$ (es la suma de los elementos de A. Ejemplo, $f(\{0, 2, 4\}) = 6$).
Pruebe que f es epiyectiva pero no es biyectiva.

P2.– Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad (denotamos 1 a la unidad de $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ y 0 al neutro de $(A, +)$). Suponga que existe $k \in I\!N$, $k \geq 1$ tal que $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k} = 0$.

(i) (3 ptos.) Pruebe que $\forall\ a \in A,\ \underbrace{a + ... + a}_{k} = 0$.

(ii) (3 ptos.) Suponga que $k = p \cdot q$, con $p, q \in I\!N$. Pruebe que si el anillo no tiene divisores de cero entonces

$$\underbrace{1 + ... + 1}_{p} = 0 \quad \vee \quad \underbrace{1 + ... + 1}_{q} = 0.$$

P3.–

(a) (i) (2 ptos.) Sea $n \in I\!N \setminus \{0\}$ y $\forall\ k \in \{0, ..., n-1\}$ considere la raíz n–ésima de la unidad $\rho_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$. Sea el polinomio $p(x) = \rho_0 + \rho_1 x + ... + \rho_{n-1} x^{n-1}$. Pruebe que las raíces de $p(x)$ son $\rho_0,...,\rho_{n-2}$.

(ii) (1 pto.) Factorice en producto de polinomios de grado 1 en $\mathbb{C}[x]$ el polinomio $1 + ix - x^2 - ix^3$.

(b) Sea $k \in I\!N$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $I\!R[x]$ por:

$$(p(x) = a_0 + ... + a_n x^n \quad \mathcal{R} \quad q(x) = b_0 + ... + b_m x^m) \quad \Leftrightarrow \quad (a_0 = b_0, ..., a_k = b_k)$$

(i) (2 ptos.) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) (1 pto.) Pruebe que si $p\ \mathcal{R}\ q$ y $p'\ \mathcal{R}\ q'$ entonces $p \cdot p'\ \mathcal{R}\ q \cdot q'$.

Tiempo: 3 horas
8 de Septiembre de 1997
SIN CONSULTAS