Control Recuperativo 1 MA11A–Algebra

P1.–

(i) (3 ptos.) Sea $H = \{(a,b) \in I\!R^2 \ / \ a \neq 0\}$. Se define la siguiente operación en H

$$(a,b) * (c,d) = (a \cdot c, a \cdot d + \frac{b}{c}).$$

Pruebe que $(H,*)$ es un grupo. Es Abeliano?.

(ii) (3 ptos.) Sea $(G,*)$ un grupo y G' un subgrupo de de G. Sea $f : G \to G$ un homomorfismo de grupos que satisface la propiedad: $f(G') \subseteq G'$. Se define el conjunto

$$V = \{g \in G \ / \ \exists \ n \in I\!N, f^n(g) \in G'\},$$

donde f^n es la composición de f con ella misma n veces y $f^0 = id_G$. Probar que V es un subgrupo de G. Para ello pruebe previamente que si $g \in G$ y $n \in I\!N$ son tales que $f^n(g) \in G'$ entonces $f^{n+1}(g) \in G'$ y concluya por inducción que $\forall \ m \geq n, \ f^m(g) \in G'$.

P2.–

(i) (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función que a $z \in \mathbb{C}$ asigna $f(z) = z^2$. Pruebe que $f^{-1}(\mathbb{Q})$ es numerable (entendemos $\mathbb{Q}$ como $\{q + 0i \in \mathbb{C} \ / \ q \in \mathbb{Q}\}$).

(ii) (2 ptos.) Sea $(f_n)_{n \in I\!N}$ la secuencia definida por $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ y para $n \geq 0$, $f_{n+2} = 2f_{n+1} + f_n$. Probar por inducción que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2}}} \end{matrix}}}}$$

donde **2** aparece $n+1$ veces.

(iii) (2 ptos.) Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$. Para ello estudie previamente las sumas $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$.

P3.– Sea $K = \{a + b\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma y producto usual de $I\!R$. Asuma que $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo.

(i) (1.5 ptos.) Se define $f : K \to K$ por $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$. Probar que f es un isomorfismo de $(K, +, \cdot)$.

(ii) (1.5 ptos.) Sea $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Probar que si $x_0 \in K$ entonces $p(f(x_0)) = f(p(x_0))$.

(iii) (1.5 ptos.) Pruebe que si $a + b\sqrt{5}$ es una raíz de $p(X)$ en K entonces $a - b\sqrt{5}$ también es raíz de $p(X)$.

(iv) (1.5 ptos.) Suponga que el polinomio $p(X)$ tiene grado 3 y que $2 + \sqrt{5}$ es una raíz de $p(X)$. Pruebe que $p(X)$ tiene una raíz en $\mathbb{Q}$.

Tiempo: 3 horas.