



Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Recuperativo 1 ALGEBRA MA-11A 1999

P1.-

(a) Calcular las siguientes sumatorias.

(i) (2 ptos.) $\sum_{i=1}^n 2^{i+1} \cdot \frac{i}{(i+1)(i+2)}$

(ii) (2 ptos.) $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \cdot i$

(b) (2 ptos.) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, n\}$ se definen enteros $a(n, k) \in \mathbb{N}$ por la recurrencia:

- $a(0, 0) = 1$,
- $a(n, 0) = 2 \cdot a(n-1, 0)$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- $a(n, n) = a(n-1, n-1)$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- $a(n, k) = a(n-1, k-1) + 2 \cdot a(n-1, k)$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Probar usando inducción que $a(n, k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

P2.-

(a) (3 ptos.) Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Pruebe que z es raíz cúbica de la unidad.

(b) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(i) (1.5 ptos.) Probar que

$$|1 - \bar{z}_1 \cdot z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2) \cdot (1 - |z_2|^2)$$

(ii) (1.5 ptos.) Deducir que si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$ entonces

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 \cdot z_2|} < 1$$

P3.- Sea $f : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ un homomorfismo de $(\mathbb{Q}, +)$ tal que $f(1) \in \mathbb{Z}$.

- (i) (1 pto.) Probar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.
- (ii) (0.5 ptos.) Deducir del punto anterior que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.
- (iii) (1 pto.) Sea $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fijo. Probar por inducción que para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene $f(\frac{p}{q}) = p \cdot f(\frac{1}{q})$.
- (iv) (0.5 ptos.) Deducir del punto anterior que $f(\frac{p}{q}) = p \cdot f(\frac{1}{q})$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.
- (v) (1 pto.) Probar que para todo $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = f(1) \cdot x$.

(vi) (2 ptos.) Sea

$$V = \{x \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) \in \mathbb{Z}\}.$$

Probar que $(V, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$.

Indicación: Recuerde que f^n es la composición n veces de f con ella misma. Puede calcular la asignación de f^n usando el punto (v).

3 horas.