Control Recuperativo MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2004-1 (29 de Julio)

P1.- **(i)** (2.5 ptos.) Demuestre sin usar inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\binom{n}{1}x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2} + ... + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + ... + n\binom{n}{n}x^n = nx$$

(ii) (2.5 ptos.) Demuestre usando inducción que:

$2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 $\forall n \in \mathbb{N}$

Indicación: Puede usar, donde corresponda, que la suma de dos enteros impares, es par.

(iii) (1.0 ptos.) Pruebe que $\sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{x-x^n}{1-x}$, $\forall n \geq 2$, $x \neq 1$

P2.- Sean $(A, +, \cdot)$ y $(A', \oplus, \odot)$ dos anillos con neutros aditivos 0 y $0'$ respectivamente y $f : A \longrightarrow A'$ un homomorfismo de anillos.

(a) Se define $I = \{\ x \in A / f(x) = 0'\}$

(a.1) (2.0 ptos.) Demuestre que $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$

(a.2) (1.0 ptos.) Demuestre que $(\forall a \in A)$ $(\forall b \in I)$, $a \cdot b \in I \quad \wedge \quad b \cdot a \in I$

(a.3) (2.0 ptos.) Si $(A, +, \cdot)$ tiene unidad u (neutro para $\cdot$) y $\exists x \in I$ tal que x es invertible, pruebe que $f(u) = 0'$ y utilícelo para demostrar que $(\forall a \in A)$ $a \in I$, es decir $A = I$

(b) (1.0 ptos.) Si $(A, +, \cdot)$ y $(A', \oplus, \odot)$ son anillos unitarios, con neutros multiplicativos u y u' respectivamente y $\exists x \in A$ tal que $f(x)$ es invertible en A', pruebe que $f(u) = u'$.

P3.- **(i)** (2.0 ptos.) Resuelva la ecuación

$$1 + 2z + 2z^2 + ... + 2z^{n-1} + z^n = 0$$

Indicación: Utilice, adecuadamente, la parte (iii) del problema 1.

(ii) (2.0 ptos.) Determinar los complejos a, b, c tales que el polinomio $P(x) = x^5 + ax^2 + b$ sea divisible por el polinomio $Q(x) = x^3 + x^2 + cx + 1$

(iii) (2.0 ptos.) Determine todas las raices del polinomio $F(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$ y factorícelo en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$.

Tiempo: 3 horas.