Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

Control Recuperativo 2 ALGEBRA MA–11A

P1.– Considere el sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3, x_4,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & bx_4 & = & b \\ x_1 & + & (a+2)x_2 & + & 2x_3 & + & bx_4 & = & 2 \\ & & 2ax_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & & & = & a \end{array}$$

Estudie la existencia de soluciones del sistema lineal en función de los parámetros a y b (existe solución, la solución es única, no hay solución). Dé explícitamente el conjunto solución en cada caso.

P2.– Sea A un conjunto con $|A| \geq 2$ (cardinalidad mayor o igual a dos) y $a_0 \in A$ (un punto arbitrario en A). Además considere el espacio vectorial V sobre el cuerpo $I\!R$. Se define el conjunto

$$S = \{f : A \to V \ / \ f \text{ es función y } f(a_0) = 0\}$$

y las siguientes operaciones,

$$\forall\ f, g \in S,\ \forall\ a \in A,\ (f+g)(a) = f(a) + g(a),$$
$$\forall\ f \in S,\ \forall\ \lambda \in I\!R,\ \forall\ a \in A,\ (\lambda f)(a) = \lambda f(a).$$

(i) Probar que S dotado de las operaciones anteriores es un espacio vectorial sobre el cuerpo $I\!R$.

(ii) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Se define la transformación $\phi_T : S \to S$ por $\phi_T(f) = T \circ f$.

(ii.1) Probar que ϕ_T es una transformación lineal.
(ii.2) Probar que T es inyectiva sí y sólo sí ϕ_T es inyectiva.

P3.– (a) Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine si A y B son o no son diagonalizables. En caso de serlo entregue una base de $I\!R^3$ tal que la matriz representante relativa a esta base sea diagonal (en cada caso).

(b) Sean $A \in M_{m\times n}(I\!R)$, $B \in M_{n\times p}(I\!R)$.

(b.1) Probar que $rango(A \cdot B) \leq rango(A)$.
(b.2) Probar que $rango(A \cdot B) \leq rango(B)$ (Indicación: considere $B^T \cdot A^T$).
(b.3) Probar que si $m = n$ y A es invertible entonces $rango(A \cdot B) = rango(B)$.

Tiempo: 3 horas
SIN CONSULTAS!!!