Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Control Recuperativo II, 1998

P1.– Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. En el producto cartesiano $E \times E$ se consideran las operaciones $(u,v)+(u',v')=(u+u',v+v')$ y $\lambda(u,v)=(\lambda u,\lambda v)$. Con las operaciones anteriores $E \times E$ es un espacio vectorial sobre K.

(a) (2 ptos.) Considere los conjuntos $\Delta = \{(u,v) \in E \times E / u = v\}$ y $\bar{\Delta} = \{(u,v) \in E \times E / u = -v\}$.

Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son subespacios vectoriales de $E \times E$ y que $\Delta \oplus \bar{\Delta} = E \times E$.

(b) (2 ptos.) Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son isomorfos a E.

(c) (2 ptos.) Si $dim\ E = n$, calcule $dim\ \Delta$, $dim\ \bar{\Delta}$ y $dim\ E \times E$.

P2.–

(a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, donde V es un e.v. de dimensión finita y T satisface $T^2 = id$.

(a.1) (1.5 ptos.) Probar que T es biyectiva

(a.2) (1.5 ptos.) Probar que $V = Ker(T+id) \oplus Ker(T-id)$.

(b) Sea T una transformación lineal del espacio $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ cuya matriz representante con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b.1) (1 pto.) Determinar la matriz representante de T c/r a la base $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$.

(b.2) (2 ptos.) Calcular bases de $Ker\ T$ e ImT y sus dimensiones.

P3.

(a) (2 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (matriz de n filas y n columnas con coeficientes reales). Si $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_s x^s$ es un polinomio de coeficientes reales, se define $q(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_s A^s$. Probar que si A es diagonalizable y $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A entonces $p(A) = 0$ (la matriz nula de dimensión $n \times n$).

(b) (4 ptos.) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Determine si son o no diagonizables. En caso de ser diagonizable dé una base de $\mathbb{R}^3$

tal que la matriz representante (de la transformación lineal representada por la matriz dada) sea diagonal.

3 Horas