Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Control Recuperativo 2, 1999

P1.– Sea A un conjunto con $|A| \geq 2$ (cardinalidad mayor o igual a dos) y $a_0 \in A$ (un punto arbitrario en A). Además considere el espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Se define el conjunto

$$S = \{f : A \to V \ / \ f \text{ es función y } f(a_0) = 0\}$$

y las siguientes operaciones,

$$\forall\ f, g \in S,\ \forall\ a \in A,\ (f+g)(a) = f(a) + g(a),$$

$$\forall\ f \in S,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ a \in A,\ (\lambda f)(a) = \lambda f(a).$$

(i) Probar que S dotado de las operaciones anteriores es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

(ii) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Se define la transformación $\phi_T : S \to S$ por $\phi_T(f) = T \circ f$.

(ii.1) Probar que ϕ_T es una transformación lineal.
(ii.2) Probar que T es inyectiva sí y sólo sí ϕ_T es inyectiva.

P2.–

(a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, donde V es un e.v. de dimensión finita y T satisface $T^2 = id$.

(a.1) (1.5 ptos.) Probar que T es biyectiva
(a.2) (1.5 ptos.) Probar que $V = Ker(T + id) \oplus Ker(T - id)$.

(b) Sea T una transformación lineal del espacio $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ cuya matriz representante con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b.1) (1 pto.) Determinar la matriz representante de T c/r a la base
$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$.
(b.2) (2 ptos.) Calcular bases de $Ker\ T$ e ImT y sus dimensiones.

P3.–

(a) (2 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ (matriz de n filas y n columnas con coeficientes reales). Si $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_sx^s$ es un polinomio de coeficientes reales, se define $q(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + ... + a_sA^s$. Probar que si A es diagonalizable y $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A entonces $p(A) = 0$ (la matriz nula de dimensión $n \times n$).

(b) (4 ptos.) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Determine si son o no diagonizables. En caso de ser diagonizable dé una base de $I\!R^3$ tal que la matriz representante (de la transformación lineal representada por la matriz dada) sea diagonal.

3 Horas