Control Recuperativo MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (28 de Julio)

P1. a) Las siguientes tablas incompletas corresponden a las operaciones en el anillo $(A, \oplus, \odot)$, para $A = \{a, b, c, d\}$

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b		d
b		a		
c			a	
d				

$\odot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a			a
c	a		c	
d	a	b	c	

i) Considerando las propiedades generales del anillo, complete las tablas anteriores justificando cada relleno. (Ind.: complete primero la tabla para $\oplus$ y para $\odot$ utilice adecuadamente la distributividad). **(3.0 ptos.)**

ii) ¿Es $(A, \oplus, \odot)$ conmutativo?. ¿Posee $(A, \oplus, \odot)$ unidad?. ¿Tiene divisores del cero? **(1.0 pto.)**

b) $(A, +, \cdot)$ es un anillo tal que $x \cdot x = x \quad \forall x \in A$. Demuestre que

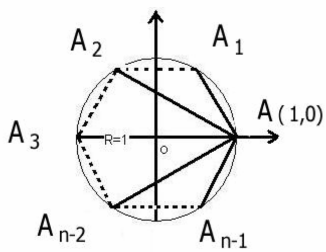
i) $x = -x \quad \forall x \in A$ ($-x$ es inverso aditivo de x) **(0.7 ptos.)**

ii) $(A, +, \cdot)$ es anillo conmutativo. **(0.7 ptos.)**

iii) $(x \cdot y) \cdot (x + y) = 0 \quad \forall x, y \in A$. **(0.6 ptos.)**

P2. a) i) Pruebe que $w_k = e^{i\frac{2k}{n}\pi}, k = 1, 2, \ldots, n-1$, son raices del polinomio $P(z) = 1 + z + z^2 \ldots + z^{n-1}$ (Ind.: Observe que $P(z)$ es una suma geométrica) **(1.5 ptos.)**

ii) Deduzca que $P(z) = (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1})$. **(0.5 ptos.)**



iii) Considere un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unitario, uno de cuyos vértices es $A = (1, 0)$. Al unir cualquier vértice del polígono con todos los restantes, se generan $n - 1$ segmentos.(ver figura). Se sabe que la distancia entre dos puntos z, w del plano complejo es $|z - w|$.

A partir del vértice $A(1, 0)$ del polígono regular, escriba las longitudes de los segmentos $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \ldots \overline{AA_{n-1}}$ y utilice (ii) para concluir que

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{AA_2} \cdot \overline{AA_3} \cdot \ldots \cdot \overline{AA_{n-1}} = n$$ **(2.0 ptos.)**

b) Sea $A = \{z \in \mathbb{Z} / |z| = c,\ c \text{ fijo }, c \in \mathbb{R}^+\}$
Sean $f, g : A \to A$ definidas por

$$f(z) = \bar{z} \quad ; \quad g(z) = iz$$

Calcule

i) $(g \circ f)(z) + (f \circ g)(z)$ **(1.0 pto.)**

ii) $|(g \circ f)(z)| + |(f \circ g)(z)|$ **(1.0 pto.)**

P3. a) Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$ no admite raíces reales y que una de sus raíces tiene modulo 2. Determine todas las raices de $P(x)$. **(3.0 ptos.)**

b) Determinar un polinomio $P(x)$, mónico. de grado 3, que sea divisible por $x - 1$ y tal que los restos de sus divisiones por $x - 2$, $x - 3$ y $x - 4$ sean iguales. **(3.0 ptos.)**

TIEMPO: 3 horas.