2º Control Recuperativo MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

12 de Diciembre de 2005

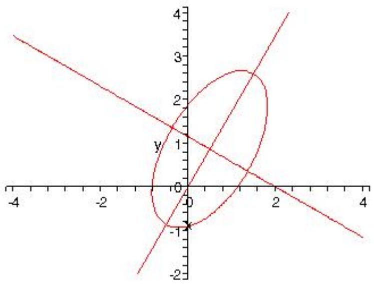
Pregunta 1.

a) (3 ptos.) La cónica de la figura tiene ecuación

$$\frac{u^2}{2^2} + v^2 = 1$$

en las variables u, v con respecto a los ejes U, V de la figura.

Encuentre la ecuación de la cónica anterior en las variables x, y con respecto a los ejes X, Y.



b) (3 ptos.) Diagonalice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

encontrando una base de vectores propios ortonormal. Dé matrices P y D diagonal tal que $A = PDP^t$.

Pregunta 2.

a) Sea A una matriz de $n \times n$ tal que $A^2 = I$.

i) (1 pto.) Pruebe que los valores propios de A son 1 o -1.

ii) (2 ptos.) Demuestre que

$$\mathbb{R}^n = Ker(A - I) \oplus Ker(A + I)$$

Indicación: considere la forma de Jordan $A = PJP^{-1}$ y verifique que todos los bloques de Jordan tienen tamaño 1 (puede utilizar otros argumentos también).

b) (1 pto.) Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si $A^2 = A$. Sean A, B matrices de $n \times n$ idempotentes. Pruebe que $A + B$ es idempotente si y sólo si $AB = -BA$:

c) Se define la traza de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ como $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

i) (1 pto.) Pruebe que si A, B son matrices de $n \times n$ entonces $tr(AB) = tr(BA)$.
Indicación: le puede servir el hecho para cualquier familia de números α_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}.$$

ii) (1 pto.) Pruebe que si $A = PBP^{-1}$ entonces $tr(A) = tr(B)$.

Pregunta 3. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ satisface

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\3\\-1\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

a) (4 ptos.) Dados $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ encuentre explícitamente las componentes del vector $T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$.

b) (1 pto.) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica (en el dominio y recorrido).

c) (1 pto.) Encuentre bases de $Ker(T)$ e $Im(T)$.

TIEMPO: 3:30 horas.