**CONTROL RECUPERATIVO**
**ALGEBRA MA11A**

31 DE AGOSTO, 2003

**Tiempo : 3 horas**

**Problema 1:**

(1) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética de razón $d$. Entonces, pruebe que:

(a)

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1.$$

**(1 ptos.)**

(b)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

**(2 ptos.)**

(2) Considere la sucesión definida por recuerrencia de la siguiente forma:

$$a_1 = a_2 = 1 \qquad a_n = 1 + a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Pruebe que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$a_n = 2^{n-1} - \frac{(-1)^n + 1}{2}.$$

**(3 ptos.)**

**Problema 2:**

(1) Encuentre todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación

$$\left(\frac{z^4+3}{z^4}\right)^2 + \left(\frac{z^4+3}{z^4}\right) - 2 = 0.$$

**(2 ptos.)**

(2) Pruebe que

$$Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0 \qquad si \quad |z| < 1.$$

**(2 ptos.)**

(3) Sea $z_n = x_n + iy_n = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{3n}$. Encuentre la forma polar de $z_n$ y pruebe que la parte real de $z_n$, $x_n$, verifica

$$x_n + 8\,x_{n-1} = 0.$$

**(2 ptos.)**

**Problema 3:**

(1) Sean $(G,\cdot)$ y $(G',*)$ dos grupos y sea $\phi : G \to G'$ un homomorfismo entre grupos. Sea $e$ el elemento neutro de $G'$. Sea $H$ el kernel de $\phi$, es decir

$$H = \{h \in G \quad : \quad \phi(h) = e\}\,.$$

Si definimos para cada $a \in G$ el conjunto

$$H \cdot a = \{h \cdot a \quad : h \in H\}\,.$$

Pruebe que

$$H \cdot a = \{x \in G \quad : \quad \phi(x) = \phi(a)\}\,.$$

**(2 ptos.)**

(2) Sea $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ y definamos la operación

$$a * b = 2a + 2b + ab + 2, \qquad \forall a, b \in S.$$

(a) Pruebe que $*$ es conmutativa y asociativa en $S$.

**(1 ptos.)**

(b) Encuentre, si es posible, el neutro $e \in S$ para $*$ en $S$. Pruebe además que $(S,*)$ es un grupo Abeliano y para cada $a \in S$, encuentre $a^{-1}$.

**(1 ptos.)**

(c) Sea

$$H = \{2^n - 2 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Muestre que $(H,*)$ es un subgrupo de $(S,*)$. Además si definimos

$$a^{(m)} = \begin{cases} \underbrace{a * a * \cdots * a}_{m-veces}, & m > 0 \\ e, & m = 0 \\ \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \cdots * a^{-1}}_{m-veces}, & m < 0. \end{cases}$$

Pruebe que existe $a \in S$ tal que

$$H = \left\{a^{(m)} \quad : \quad m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**(2 ptos.)**