Control Recuperativo MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (3 de Agosto)

P1.

i) (1.5 ptos.) Sean $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$. Demuestre que $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_n}|$

ii) (1.5 ptos.) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un real fijo. Demuestre que el polinomio
$P(x) = (cos\theta + xsen\theta)^n - cos(n\theta) - xsen(n\theta)$ es divisible por $x^2 + 1$.

iii) (3.0 ptos.) Encontrar los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

P2.

i) (2 ptos.) Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$.
Se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raíz de $P(x)$ y se pide:
Encontrar todas las raices de P y factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

ii) (2 ptos.) Considere la función $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definida por $F(P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k$, para cada $P \in \mathbb{R}[x]$ de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

a) Estudie la inyectividad y la sobreyectividad de F.

b) Si $F(P(x) = 0$, indique, al menos, una de las raíces de $P(x)$.

iii) (2 ptos.) Sea $P(x)$ un polinomio mónico ($a_n = 1$) de grado 3 y tal que 0 y 2 son raíces de P y los restos de dividir P por $(x - 1)$ y $(x - 3)$ son iguales.
Determine $P(x)$ e indique todas sus raíces.

P3. Sean $(A, +, \cdot)$ y $(A', \oplus, \odot)$ dos anillos con neutros aditivos 0 y 0'respectivamente y $f : A \to A'$ un homomorfismo de anillos.

a) Se define $I = \{x \in A / f(x) = 0'\}$

(a.1) (2.0 ptos.) Demuestre que $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$

(a.2) (1.0 pto.) Demuestre que $(\forall a \in A)(\forall b \in I), a \cdot b \in I \wedge b \cdot a \in I$

(a.3) (2.0 ptos.) Si $(A, +, \cdot)$ tiene unidad u (neutro para $\cdot$) y $\exists x \in I$ tal que x es invertible, pruebe que $f(u) = 0'$ y utilícelo para demostrar que $(\forall a \in A)\ \ a \in I$, es decir $A = I$.

b) (1.0 pto.) Si $(A, +, \cdot)$ y $(A', \oplus, \odot)$ son anillos unitarios, con neutros multiplicativos u y u' respectivamente y $\exists x \in A$ tal que $f(x)$ es invertible en A', pruebe que $f(u) = u'$.

TIEMPO: 3 hrs.