DETERMINANTES

Prof. Jorge Amaya A.

Definición. Consideremos el conjunto $S = \{1, ..., n\}$. Una permutación π es una aplicación biyectiva de S en S.

Ejemplo. $S = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad \pi : S \to S$ tal que
$\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 1,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 3,$
es una permutación.

Es claro, puesto que una permutación es siempre biyectiva, que π es invertible.

Pregunta. ¿Cuántas permutaciones existen para un conjunto $S = \{1, ..., n\}$ dado? (Respuesta: n!).

Consideremos π, σ dos permutaciones de S. Entonces se puede definir π o σ, y por propiedades de funciones biyectivas, sabemos que π o σ también lo es, por lo tanto es una permutación. Veamos un ejemplo: sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y las permutaciones

$$\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 1$$
$$\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 4,\ \sigma(3) = 1,\ \sigma(4) = 2$$

Se tiene entonces que

$$\pi \text{ o } \sigma(1) = 4,\ \pi \text{ o } \sigma(2) = 1,\ \pi \text{ o } \sigma(3) = 2,\ \pi \text{ o } \sigma(4) = 3$$

Ejercicio: Determinar σ o π, ¿Coincide con π o σ? Repetir para las permutaciones

$$\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 1,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 3$$
$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1$$

Dado que una permutación π es biyectiva, su inversa π^{-1} existe. Más aún, dadas dos permutaciones π, σ, existe una permutación ρ tal que ρ o $\pi = \sigma$. En efecto, $\rho = \sigma$ o π^{-1}.

Definición. $i : S \to S$ tal que $i(k) = k,\ \forall k \in S$, se llamará permutación identidad.

Para cualquier permutación π se verifica obviamente π o $\pi^{-1} = \pi^{-1}$ o $\pi = i$.

Definición: Si $k, j \in S$, tales que $k < j$ y $\pi(k) > \pi(j)$, se dice que la permutación π realiza una inversión en S.

Ejercicio. Si $p(\pi)$ es número total de inversiones, calcularlo en el caso siguiente:
$S = \{1, 2, 3, 4\}$,
$\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1, \pi(4) = 4$
(Respuesta: $p(\pi) = 2$).

Propiedad. $p(\pi) = p(\pi^{-1})$

Definición. Se llama signo de una permutación π a la cantidad $sgn(\pi) = (-1)^{p(\pi)}$ y, cuando $sgn(\pi) = -1$ se dice que π es impar. En el caso en que $sgn(\pi) = 1$, se dice par.

Es claro que una permutación par (impar) realiza un número par (impar) de inversiones.

Ejercicio: Determinar el signo de π, σ y π o σ en $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, definidas mediante

$$\pi(1) = 1,\ \pi(2) = 2,\ \pi(3) = 5,\ \pi(4) = 3,\ \pi(5) = 4$$
$$\sigma(1) = 5,\ \sigma(2) = 4,\ \sigma(3) = 3,\ \sigma(4) = 2,\ \sigma(5) = 1$$

Teorema 1. $sgn(\pi \text{ o } \sigma) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$

Demostración. Tarea.

Corolario. $sgn(\pi) = sgn(\pi^{-1})$

Definición. Sea P_n el conjunto de todas las permutaciones en $S = \{1, ..., n\}$
y $A = (a_{ij})$ una matriz de n filas y n columnas. El determinante de A es una aplicación que llamaremos det y que está definida mediante

$$detA = \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} ... a_{n\pi(n)}$$

o bien, escrito en forma compacta

$$detA = \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) \prod_{k=1}^{n} a_{k\pi(k)}$$

Ejemplos. 1) Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Hay dos permutaciones posibles:

$$\pi_1(1) = 1 \qquad \pi_1(2) = 2$$
$$\pi_2(1) = 2 \qquad \pi_2(2) = 1$$

$$
\begin{aligned}
detA &= sgn(\pi_1)\ a_{1\pi_1(1)}a_{2\pi_1(2)} + sgn(\pi_2)a_{1\pi_2(1)}a_2\pi_2(2) \\
&= 1 \cdot a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

2) Sea

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

Las 6 permutaciones posibles están indicadas en la tabla siguiente:

S	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	1	2
3	3	2	3	1	2	1
$sgn(\pi)$	1	-1	-1	1	1	-1

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

Nota: Observar que las permutaciones se aplican solamente al índice de columnas. En el teorema siguiente veremos que se puede equivalentemente permutar las filas.

Pregunta: Si A es de $n \times n$ ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de det A? (Respuesta: $n!$)

Teorema 2. $detA = detA^T$.

Demostración. Se sabe que

$$
detA = \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)}
$$

Pero $\pi(j) = k \Rightarrow \pi^{-1}(k) = j$, luego

$$
\begin{aligned}
detA &= \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{\pi^{-1}(1)1} a_{\pi^{-1}(2)2} \ldots a_{\pi^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in P_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} \\
&= detA^T
\end{aligned}
$$

Teorema 3. Si A' es la matrix obtenida a partir de A al multiplicar una fila (o columna) por un escalar λ, se tiene que $detA' = \lambda detA$

Demostración: Si la fila k de A se multiplica por λ:

$$\begin{aligned} detA' &= \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... (\lambda a_{k\pi(k)}) ... a_{n\pi(n)} \\ &= \lambda \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... a_{n\pi(n)} \\ &= \lambda detA \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -10$$

$$det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 30$$

(se ha multiplicado la segunda fila por $\lambda = -3$)

Corolario. $det(\lambda A) = \lambda^n detA$

Teorema 4. Si A' es la matriz obtenida al intercambiar dos filas (o columnas) de A, se tiene que

$$detA' = -detA$$

Demostración: Intercambiar dos filas es como intercambiar dos índices de fila en los elementos de A. Esto corresponde a componer cada permutación π de la sumatoria $\sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... a_{n\pi(n)}$ con una permutación impar (que deja todos los índices iguales, salvo dos que se intercambian). Es claro entonces que cada término de esa sumatoria cambia de signo, luego

$$detA' = -detA$$

Teorema 5. Si A tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces $detA = 0$.

Demostración: Ocuparemos el teorema anterior. Sea A' obtenida de A, al intercambiar las dos filas (o columnas) que son iguales. Es claro que $A' = A$, pero $detA' = -detA$ luego $detA = 0$.

Ejemplo: (para ilustrar los dos teoremas anteriores).

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = -4$$

$$det \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} = 0 \text{ (las filas 1 y 3 coinciden)}$$

Teorema 6. Supongamos que a una fila (o columna) de la matriz A se le suma otra fila (o columna) multiplicada por un escalar. Si A' es la matriz resultante, entonces $detA' = detA$.

Demostración: Supongamos que a la fila j le sumamos la fila k multiplicada por λ. En este caso

$$\begin{aligned} detA' &= \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... (a_{j\pi(j)} + \lambda a_{k\pi(j)}) ... a_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... a_{n\pi(n)} + \lambda \sum_{\pi \in P_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} ... a_{k\pi(j)} ... a_{k\pi(j)} ... a_{n\pi(n)} \\ &= detA + \lambda detC \end{aligned}$$

donde C es una matriz que tiene dos filas iguales (las filas j y k) y por lo tanto $detC = 0$. Así, se tiene

$$detA' = detA.$$

Observación. Si la matriz A la escribimos en la forma

$$A = [A_1, ..., A_n]$$

donde $A_1, ..., A_n$, representan las columnas, entonces

$$det[A_1, ..., A_j + \lambda v, ..., A_n] = detA + \lambda det[A_1, ..., v, A_{j+1}, ... A_n]$$

donde v es un vector columna cualquiera.

Esta propiedad (que es válida también para las filas) se demuestra de manera similar al teorema anterior, pero es más general. En efecto, en el caso del teorema, v es una columna de la matriz A.

Veamos el ejemplo siguiente: Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante vale 4. Sea $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
det \begin{bmatrix} 3 & 2\lambda & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} &= det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 4 + \lambda(-10).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si a la primera fila de A sumamos la tercera multiplicada por -3 nos da

$$
A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

cuyo determinante es también igual a 4.

Veamos ahora los determinantes de las matrices elementales. Primeramente, es obvio que $detI = 1$. Ocupando los teoremas anteriores se tiene

$$
detE_{ij} = det \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 ... 1 & & \\ & \vdots & & \\ & 1 \;\; 0 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = -1
$$

pues E_{ij} se obtiene permutando dos filas (i y j) de I.

$$
detE_i(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \lambda detI = \lambda
$$

pues $E_i(\lambda)$ se obtiene multiplicando la fila i de I por λ (distinto de cero).

$$
detE_{ij}(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & & & \\ & \lambda & \cdots & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = 1
$$

pues $E_{ij}(\lambda)$ se obtiene sumando a la fila j de I, la fila i multiplicada por λ.

Teorema 7. Si E es una matriz elemental cualquiera entonces

$$det(EA) = detE \cdot detA = det(AE)$$

Demostración: Tarea.

Teorema 8. $detA = 0 \Leftrightarrow A$ no invertible.

Demostración: a) Supongamos que A es invertible; entonces ella es igual a un producto de matrices elementales $E_1, ..., E_r$ es decir

$$A = E_1 ... E_r$$

de donde, $detA = detE_1 ... detE_r$ (aplicando reiteradamente el teorema 7). Dado que los determinantes de las matrices elementales son todos distintos de cero, se tiene que $detA \neq 0$.

(b) Supongamos que A es no invertible; entonces existe alguna fila (o columna) que es linealmente dependiente de las demás. Mediante operaciones elementales adecuadas es posible anular dicha fila (o columna) y obtener una matriz de determinante nulo. De ahí, la matriz A tiene también determinante nulo (¿por qué?).

Teorema 9. $det(AB) = detA \cdot detB = det(BA)$

Demostración. Si A ó B es no invertible, entonces AB es no invertible y el teorema es trivialmente cierto.

Si A y B son invertibles entonces

$$\begin{aligned} A &= E_1 ... E_r \\ B &= E'_1 ... E'_s \end{aligned}$$

donde $E_1, ..., E_r, E'_1 ... E'_s$ son matrices elementales. De aquí fluye fácilmente
$det(AB) = det(E_1 ... E_r E'_1 ... E'_s)$

$$\begin{aligned} &= det(E_1 ... E_r) \cdot det(E'_1 ... E'_s) \\ &= detA \cdot detB = det(BA) \end{aligned}$$

Veremos ahora una forma práctica de calcular un determinante. Tomemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y escribámosla en la forma

$$A = \begin{bmatrix} 3+0+0 & 2 & 0 \\ 0-2+0 & 1 & 2 \\ 0+0-4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De los teoremas anteriores se deduce

$$detA = det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (-4)det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

lo cual se puede expresar para una matriz cualquiera de 3×3 en la forma

$$detA = a_{11}det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Se dice, en este caso, que el determinante se ha desarrollado con respecto a la primera columna y se podría establecer una fórmula análoga para cualquier columna (o fila). Introduciremos una notación adecuada para formalizar esta técnica de cálculo en un caso general.

Definición: Se llama cofactor de a_{ij} a

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

donde m_{ij} es el determinante (llamado "menor de a_{ij}") de la matriz que resulta de A, al eliminar la fila i y la columna j.

Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -8 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} det \begin{bmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -6$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -12$$

$$C_{44} = (-1)^{4+4} det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 48$$

Se puede generalizar la fórmula obtenida para matrices de 3×3 al caso de una matriz de $n \times n$:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

(desarrollo con respecto a la fila i)

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

(desarrollo con respecto a la columna j)

Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando con respecto a la segunda fila (¿por qué es conveniente hacerlo así?):

$$\begin{aligned} detA &= 1 \cdot (-1)^{2+2} det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} + 2(-1)^{2+4} det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot (-120) + 2 \cdot 60 = 0 \end{aligned}$$

Mostraremos finalmente una aplicación novedosa de las propiedades de los determinantes a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Supongamos que A es cuadrada $(n \times n)$ e invertible y consideremos el sistema $Ax = b$. Escribamos la matriz A en la forma $A = [A_1, ..., A_n]$ donde A_i denota la columna i. Examinemos el determinante de la matriz $[b, A_2, ..., A_n]$ que resulta de reemplazar la primera columna de A, por b.

$$\begin{aligned} det[b, a_2, ..., A_n] &= det[Ax, A_2, ..., A_n] \\ &= det[x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_n A_n, A_2, ..., A_n] \\ &= x_1 det[A_1, A_2, ..., A_n] + x_2 det[A_2, A_2, ..., A_n] + ... \\ &\quad ... \qquad + x_n det[A_n, A_2, ..., A_n] \\ &= x_1 det[A_1, A_2, ..., A_n] \end{aligned}$$

puesto que todos los determinantes en el lado derecho de este expresión son nulos salvo el primero. En efecto, todos tienen dos columnas iguales, salvo el primero que es $detA$, luego

$$x_1 = \frac{det[b, A_2, ..., A_n]}{detA}$$

y en general, se puede obtener de manera análoga

$$x_i = \frac{det[A_1, ..., b, A_{i+1}, ..., A_n]}{detA} \quad \text{para } i = 1, ..., n$$

Esta forma de cálculo se conoce con el nombre de regla de Cramer y no tiene gran aplicación en la práctica, por el esfuerzo de cálculo que requiere la evaluación de los determinantes, sobre todo cuando n es muy grande. Además sólo se puede utilizar cuando A es invertible.

Ejercicios.

1. Calcular

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Demostrar que si A^{-1} existe, entonces $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$

3. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

por el método de Gauss, y utilizando la regla de Cramer.

4. Si A es antisimétrica $(A = -A^T)$ de $n \times n$ demostrar que $detA \neq 0 \Rightarrow n$ es par

5. ¿Para qué valores de λ, la matriz

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

no es invertible?

6. Calcular el determinante de la función lineal $\ell : I\!R^2 \to I\!R^2$ definida por
$\ell(x, y) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$,
θ dado.

Indicación: Encontrar primero la matriz asociada a ℓ con respecto a algún par de bases. ¿Depende el valor del determinante de la base elegida?

7. Demostrar que si dos matrices A y B son semejantes, es decir, $A = PBP^{-1}$, para alguna matriz P invertible, entonces

$$detA = detB$$

Este ejercicio sirve para dar una respuesta general a la pregunta del ejercicio anterior.