MA-11A Algebra **10 de Diciembre, 2000**

Examen 1

TIEMPO: 3.30 HRS.

PROBLEMA 1:

(a).- (3.0 pts) Sea la cónica $3x^2 + 3y^2 - 20xy - 6\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y = -38$. Haga el cambio de variables que permite escribir la cónica de manera centrada y escriba la nueva expresión. Identifique la cónica resultante y dibújela.

(b).- Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matriz con coeficientes reales y simétrica. Demuestre que:

(b.i).- (1.0 pts) λ es valor propio de A asociado al vector propio v si y sólo si $(1 + \lambda)$ es valor propio de $(I + A)$ asociado al vector propio v.

(b.ii).- (1.0 pts) A es semi-definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son mayores o iguales a cero.

(b.iii).- (1.0 pts) Si A es semi-definida positiva entonces $(I + A)$ es definida positiva.

PROBLEMA 2: Sean $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, con $m \leq n$. Sean las matrices cuadradas de $(n+m) \times (n+m)$ expresadas por bloques:

$$E = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

(a).- (3.0 pts) Pruebe que $EP = PF$ (es decir, que E y F son matrices similares). Concluya que E y F tienen el mismo polinomio característico (es decir $p_{_E}(\lambda) = p_{_F}(\lambda)$).

(b.i).- (1.5 pts) Pruebe que $p_{_E}(\lambda) = (-\lambda)^n p_{_{AB}}(\lambda)$ y $p_{_F}(\lambda) = (-\lambda)^m p_{_{BA}}(\lambda)$.

<u>Indicación</u>: Use que, si X e Y son matrices cuadradas, entonces $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(X) \cdot \mathrm{Det}(Y)$.

(b.ii).- (1.5 pts) Concluya que $p_{_{BA}}(\lambda) = (-\lambda)^{n-m} p_{_{AB}}(\lambda)$.

PROBLEMA 3: Sea $u = (u_1, u_2, u_3)^t \in \mathbb{R}^3$ con $u \neq 0$. Considere la aplicación que transforma vectores de $\mathbb{R}^3$ en matrices de 3×3 dada por $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{3,3}(\mathbb{R})$ tal que $T(v) = vu^t$.

(a).- (1.0 pts) Demuestre que T es lineal.

(b).- (2.0 pts) Calcule el $\mathbb{K}er(T)$ y encuentre una base de $\mathbb{I}m\,(T)$. ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva?

(c).- (1.5 pts) Encuentre la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas.

(d).- (1.5 pts) Pruebe que $T(v)$ es simétrica si y sólo si $v \in \langle\{u\}\rangle$. ¿Para qué valores de v la matriz $T(v)$ es invertible?