Fecha: 2 de diciembre del 2002
Tiempo: 3 horas

Examen MA-11A Álgebra

1. (a) (4 ptos) Sea la cónica $-x^2 + 2y^2 + 4xy - \frac{22}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}}y = 11$. Haga el cambio de variables que permite escribir la cónica de manera centrada y escriba la nueva expresión. Identifique la cónica resultante y dibújela.

   (b) (2 ptos) Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T \circ T = id$, donde id es la función identidad en $\mathbb{R}^n$. Considere la función $P = \frac{1}{2}(T + id)$. Demuestre que $P \circ P = P$.

2. Sea la matriz de n filas y n columnas a coeficientes reales siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \diagup & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \diagup & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \diagup & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) (2 ptos) Demuestre que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de la matriz A.

   (b) Encuentre las matrices P yD tales que $A = PDP^t$ con $P^t = P^{-1}$ y D diagonal para

      i. (2 ptos) $n = 4$.

      ii. (2 ptos) $n = 3$.

3. Decimos que una matriz cuadrada de $n \times n$ a coeficientes reales A pertenece al conjunto $\mathcal{E}$ si para toda fila de A la suma de sus términos es igual a 1. Formalmente:

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \forall\, 1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\}$$

   (a) Demuestre que:

      i. (1 pto) $A \in \mathcal{E} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio 1.

      ii. (1 pto) Si $A, B \in \mathcal{E}$, entonces $AB \in \mathcal{E}$.

      iii. (1 pto) Si $A \in \mathcal{E}$ y A es invertible, entonces $A^{-1} \in \mathcal{E}$.

   (b) Sea $A \in \mathcal{E}$ tal que para todo $1 \leq i, j \leq n$ se tiene $a_{ij} > 0$.

      i. (1.5 ptos) Demuestre que si λ es valor propio de A y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado, entonces para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene que $|\lambda||v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j|$.

      ii. (1.5) ptos Concluya que si λ es valor propio de A, entonces $|\lambda| \leq 1$.
      IND: Considere v_i tal que $|v_i| = \max\{|v_j| \ : j = 1, \ldots, n\}$

Sin consultas.