Examen MA11A Algebra

Diciembre 1996

P1.– Considere el sistema lineal de ecuaciones en las variables x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & 2ax_4 & = & b \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & (5b+2a)x_3 & + & 4ax_4 & = & 3+2b \\ & & & & 6x_3 & + & ax_4 & = & 5+7b \\ 6x_1 & + & 10x_2 & + & (5b+3a)x_3 & + & 6ax_4 & = & 3+3b+a, \end{array}$$

donde a y b son parámetros en $I\!R$. Encontar los valores de los parámetros a y b para los cuales el sistema lineal tiene solución y para dichos valores explicite la solución general del sistema.

P2.– (a) (4 ptos.) Considere la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a.1) Calcular los valores propios de A y encontrar una base ortonormal de vectores propios.

(a.2) Encontrar matrices P y D tales que D es diagonal, P es invertible y $A = PDP^{-1}$.

(b) (2 ptos.) Considere la forma cuadrática definida en $I\!R^2$ por $q(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$.

(b.1) Diga si la matriz asociada a la forma cuadrática es definida positiva (justifique su respuesta).

(b.2) Indentifique y dibuje la cónica correspondiente a $q(x,y) = 4$. Para ello determine el cambio de variables que permite escribir la forma cuadrática en forma standard.

P3.– Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en $I\!R^n$, donde $k < n$. Considere la matriz P cuyas columnas son los vectores $v_1, ...v_k$ respectivamente (notar que P no es cuadrada pues $k < n$).

(i) (1 pto.) Si $x \in I\!R^k$ probar que si $Px = 0$ entonces $x = 0$.
(ii) (1.5 ptos) Pruebe que la matriz $P^T P$ (que es una matriz de $k \times k$) es definida positiva y deduzca que Ker$(P^T P)$= $\{0\}$.
(iii) (1.5 ptos) Sea $A = P(P^T P)^{-1} P^T$. Probar que $AP = P$ y $A^2 = A$. Probar que los vectores $v_1, ..., v_k$ son vectores propios de A asociados al valor propio 1.
(iv) (1 pto.) Sea $V = \langle\{v_1, ..., v_k\}\rangle$ y $\{w_1, ..., w_{n-k}\}$ una base de $V^\perp$ (el ortogonal de V). Probar que $Aw_i = 0$, para todo $i \in \{1, ..., n-k\}$.
(v) (1 pto.) Calcular la matriz representante de A con respecto a la base
$\beta = \{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_{n-k}\}$ en el espacio de partida y de llegada.