Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

EXAMEN ALGEBRA MA–11A

P1.–

(a) (4 ptos.) Considere la cónica,

$$-3y^2 + 4xy - \frac{12}{\sqrt{5}}x + \frac{14}{\sqrt{5}}y = 7$$

(a.1) Identifique la cónica antes descrita.

(a.2) Es la matriz de la forma cuadrática asociada a la cónica anterior definida positiva ?, argumente.

(b) (2 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ una matriz simétrica cuyos valores propios son $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 1$ y $\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$ con $0 < k < n$, y su descomposición es $A = PDP^T$ con $P \in M_{n\times n}(I\!R)$ matriz ortogonal y D la matriz diagonal de valores propios.

(b.1) Sea $z = P^T x$ y $x \in I\!R^n$, probar que $||Ax||^2 = ||Dz||^2$ y que $||x||^2 = ||z||^2$. Concluir que para todo $x \in I\!R^n$, $||Ax||^2 \leq ||x||^2$.

(b.2) Probar que existe $x_0 \in I\!R^n \setminus \{0\}$ tal que $||Ax_0||^2 = ||x_0||^2$.

P2.– Se quiere resolver la siguiente recurrencia de números reales: $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ y $\forall\ n \geq 0$,

$$u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}.$$

Para ello definimos $x^{(n)} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}$, $n \geq 0$.

(1) (1.5 ptos.) Calcule $A \in M_{3\times 3}(I\!R)$ tal que

$$\forall\ n \geq 0, \quad x^{(n+1)} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} = Ax^{(n)}$$

y demuestre que $x^{(n+1)} = A^{n+1}x^{(0)}$.

(2) (4.5 ptos.) Usando la expresión anterior calcule u_n para $n \geq 3$.

P3.– Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Sean V y W subespacios vectoriales de E tales que $V \cap W = \{0\}$, y $S : V \to W$ una transformación lineal. Se define $T : V \oplus W \to W$ por $T(x) = w + S(v)$, donde $x = v + w$ con $v \in V$, $w \in W$.

(1) (1.5 ptos.) Probar que T es una transformación lineal.

(2) (2 ptos.) Sean $B = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B' = \{w_1, ..., w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Si A es la matriz representante de S con respecto a las bases B y B', calcular la matriz representante de T con respecto a las bases $B'' = \{v_1, ..., v_n, w_1, ...w_m\}$ y B'.
(3) (1.5 ptos.) Probar que $\{v_1 - S(v_1), ..., v_n - S(v_n)\}$ es una base de $Ker(T)$.
(4) (1 pto.) Probar que T es sobreyectiva.

SIN CONSULTAS
29 de Diciembre de 1997
3,5 Horas