Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

EXAMEN ALGEBRA MA–11A 1998

P1.–

(a) (4 ptos.) Considere la cónica de ecuación $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 16x + 16y = -15$. Realice el cambio de variable que permite escribir la cónica de manera centrada y escriba la nueva expresión (escribir explícitamente dicho cambio de variables). Identifique la cónica resultante y dibújela.

(b) (2 ptos.) Encontrar los valores de los parámetros α y β en $I\!R$ tales que la matriz siguiente sea definida positiva

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \beta \end{bmatrix}.$$

P2.–

(a) Sea $T : M_{2\times 2}(I\!R) \to M_{2\times 2}(I\!R)$ la transformación definida sobre toda matriz cuadrada de 2×2 con coeficientes reales A por $T(A) = M \cdot A + A \cdot M$, donde $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a.1) (0.5 ptos.) Pruebe que T es lineal.

(a.2) (1 pto.) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $M_{2\times 2}(I\!R)$. (Ind.: previamente calcular una fórmula para $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)$).

(a.3) (2 ptos.) Calcular una base y la dimensión de $Ker(T)$ (núcleo de T) e $Im(T)$ (imagen de T). Analice la inyectividad y la sobreyectividad de T.

(a.4) (1 pto.) Pruebe que $Ker(T) \oplus Im(T) = M_{2\times 2}(I\!R)$.

(b) (1.5 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ una matriz diagonalizable cuyo único valor propio es $\lambda \in I\!R$. Pruebe que $A = \lambda \cdot I$, donde $I \in M_{n\times n}(I\!R)$ es la matriz identidad.

P3.–

(a) (1.5 ptos.) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ una matriz simétrica invertible. Pruebe que si A es definida positiva entonces A^{-1} es definida positiva.

(b) (1.5 ptos.) Sea $B \in M_{n\times n}(I\!R)$. Pruebe que si B es invertible entonces $B \cdot B^T$ es definida positiva.

(c) Sea $A \in M_{3\times 3}(I\!R)$ una matriz simétrica. Se sabe que los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Además se conoce el subespacio propio asociado a λ_1,

$$Ker(A - 2I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(c.1) (1 pto.) Pruebe que el espacio propio asociado a λ_2 es

$$Ker(A-I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}.$$

(c.2) (1 pto.) De una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.
(c.3) (1 pto.) Calcular la matriz A.

3 Horas