Examen MA11A Algebra 1999
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

P1.–
(a) (3 ptos.) Considere la cónica de ecuación

$$(1+a)x^2 + (1+a)y^2 + 2 \cdot (1-a)xy = 2$$

donde $a \in I\!R$ es un parámetro. Realice el cambio de variable que permite escribir la cónica de manera centrada y escriba la nueva expresión (escriba explícitamente dicho cambio de variables). Indentifique la cónica resultante en función del parámetro a.

(b) Sean $A \in M_{n,n}(I\!R)$ una matriz simétrica e I la matriz identidad.

(b.1) (1 pto.) Probar que $v \in I\!R^n$ es vector propio de A si y sólo si es vector propio de $I-A$. Si $\lambda \in I\!R$ es el valor propio de A asociado a v, ¿ cuál es el valor propio de $I-A$ asociado a v ?
(b.2) (2 ptos.) Probar que la matriz $I-A$ es definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son menores estrictos que uno.

P2.– Sean $A, B \in M_{2,2}(I\!R)$ y

$$S : I\!R^4 \to I\!R^4, \qquad S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, y

$$R : I\!R^4 \to I\!R^4, \qquad R\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Se define $T : I\!R^4 \to I\!R^4$ por $T(x) = S(x) + R(x)$.

(i) (0.5 ptos.) Probar que S es lineal.
(ii) (1.5 ptos.) Pruebe que $Im(T) = Im(S) \oplus Im(R)$.

Asuma en las partes que siguen que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicación: le será útil calcular una fórmula explícita para $T(x)$.

(iii) (2.0 ptos.) Dar una base del $Ker(T)$ y calcular su dimensión. Analice inyectividad y sobreyectividad de T.

(iv) (2.0 ptos.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{B}$–$\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

P3.–

(a) (2 ptos.) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y $P =< \{v_0\} >$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. Se define $Q = \{A \cdot v \mid v \in P\}$. Probar que si $Q = P$ entonces v_0 es vector propio de A asociado a un valor propio distinto de cero.

(b) (4 ptos.) Sea $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ una matriz cuyos valores propios son 1 y -1. Se sabe además que los espacios propios respectivos son

$$Ker(A - 1 \cdot I) =< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} >, \qquad Ker(A - (-1) \cdot I) =< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} > .$$

Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Tiempo: 3,5 horas.