MA-11A Algebra	**30 de Noviembre, 2000**

Examen 1

TIEMPO: 3.15 HRS.

PROBLEMA 1: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$.

(i).- Diga para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$,

(i.1).- (1.5 pts) la matriz A es invertible,

(i.2).- (1.5 pts) el vector $(1,1,3)^T \in \mathbb{R}^3$ está en $\mathbb{I}m(A)$.

(i.3).- (1.5 pts) el $\mathbb{K}er(A)$ tiene dimensión 1. En este caso, determine el $\mathbb{K}er(A)$.

(ii).- (1.5 pts) Si $a = 2$, $b = 0$, y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x) = Ax$, determine una base β en el espacio de partida de T tal que si en el espacio de llegada de T se utiliza la base canónica, la matriz representante con respecto a estas bases es la matriz identidad $I \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Dibuje e identifique la cónica determinada por $x^2 + y^2 + 6xy + 4\sqrt{2}(x+y) = -2$. Explicite todos los cambios de variable que requiera.

(ii).- (1.5 pts) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Pruebe que existe $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible tal que $A = B^T B$ sí y sólo si A es simétrica y definida positiva. Concluya que si A es simétrica definida positiva, entonces existen $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(iii).- (1.5 pts) Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ortogonales. Pruebe que $v_1 v_1^T, \ldots, v_k v_k^T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ son matrices linealmente independientes.

PROBLEMA 3: Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ortogonales y de norma 1, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y

$$A = \gamma_1 \cdot v_1 v_1^T + \ldots + \gamma_k \cdot v_k v_k^T \in M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

(i).- (2.0 pts) Pruebe que $\mathbb{I}m(A) = \langle \{v_1, \ldots, v_k\} \rangle$, que $\mathbb{K}er(A) = \langle \{v_1, \ldots, v_k\} \rangle^\perp$, y determine $rango(A)$.

(ii).- (2.0 pts) Sea $\{w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ base ortonormal del $\mathbb{K}er(A)$. Demuestre que $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de A. Especifique cual es el valor propio correspondiente a cada uno de estos vectores propios.

(iii).- (2.0 pts) Sea $A = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$. Determine $\{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \gamma_1 \cdot v_1 v_1^T + \gamma_2 \cdot v_2 v_2^T.$$