MA-11A Algebra	**5 de Enero, 2001**

Examen 2

TIEMPO: 3 HRS. 15 MIN

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Sea $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule Q^{15}.

(ii).- Sea $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ y $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = MA$.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que T es lineal.

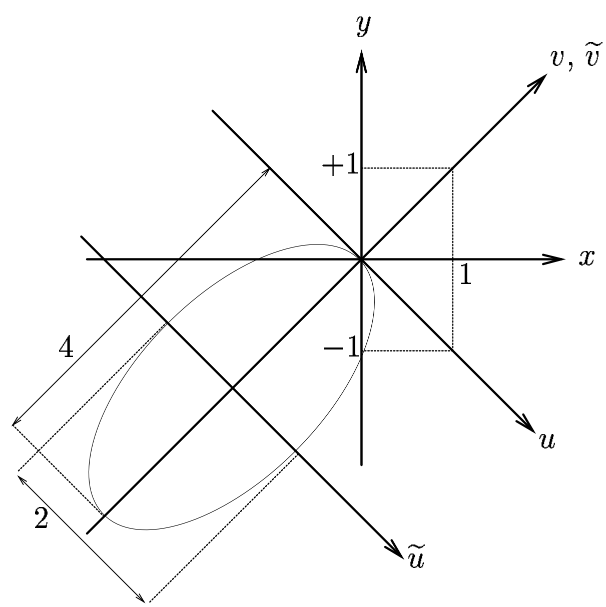
(ii.2).- (1.0 pts) Cuando $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ denotamos por $A_{*,i}$ la i–ésima columna de A. Pruebe que $A \in \mathbb{K}er(T)$ sí y sólo si $A_{*,1}, A_{*,2} \in \mathbb{K}er(M)$.

(ii.3).- (1.0 pts) Para $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ encuentre una base de $\mathbb{I}m(T)$.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Determine la ecuación de la cónica que se muestra en la figura de más abajo en cada uno de los siguientes sistemas de coordenadas:

(i.1).- $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, (i.2).- (u, v), y (i.3).- (x, y).



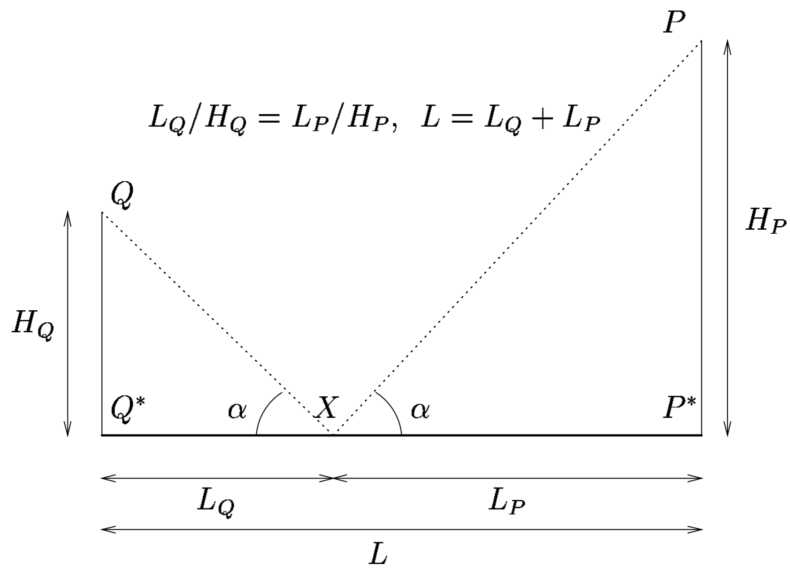
(ii).- (3.0 pts) En $\mathbb{R}^3$ se coloca un espejo infinito en el plano de ecuación normal

$$\Pi : \quad \langle X, N \rangle = 0\,, \qquad \text{donde } N = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sean $P^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = P^* + 6N$, y $Q = Q^* + 2N$.

¿Cuales son las coordenadas del punto X en el plano Π al cual debe apuntar un emisor de luz situado en Q para que el reflejo sobre el espejo encandile a un observador situado en P?

Indicación: Observe que $P^*, Q^* \in \Pi$ y que el haz de luz encandila al observador si en el plano en que se encuentran P, Q, P^*, y Q^* la situación es:



PROBLEMA 3: Sea $P \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matriz cuyas columnas son linealmente independientes.

(i).- (1.5 pts) Pruebe que si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Px = 0$, entonces $x = 0$. Deduzca que $\mathbb{K}er(P^T P) = \{0\}$ y concluya que $P^T P$ es invertible.

(ii).- (1.5 pts) Sea $A = P(P^T P)^{-1} P^T$. Pruebe que A es simétrica y que $AP = P$.

(iii).- (1.5 pts) Sean $Y \in \mathbb{R}^m$, $\widetilde{Y} = AY$ y $Z \in \mathbb{I}m(P)$. Pruebe que $Y - \widetilde{Y}$ es ortogonal a Z.

(iv).- (1.5 pts) Sean $Y \in \mathbb{R}^m$, $\widetilde{Y} = AY$ y $Z \in \mathbb{I}m(P)$. Pruebe que $||Y - Z||^2 \geq ||Y - \widetilde{Y}||^2$.

Indicación: Descomponga $Y - Z = (Y - \widetilde{Y}) + (\widetilde{Y} - Z)$ y observe que $\widetilde{Y}$ también pertenece a $\mathbb{I}m(P)$.