MA-11A Algebra	**9 de Enero, 2002**

Examen 2

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (2.0 pts) Sean $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Pruebe que $V = \{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \,/\, AX = XB\}$ es un subespacio vectorial de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(ii).- Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

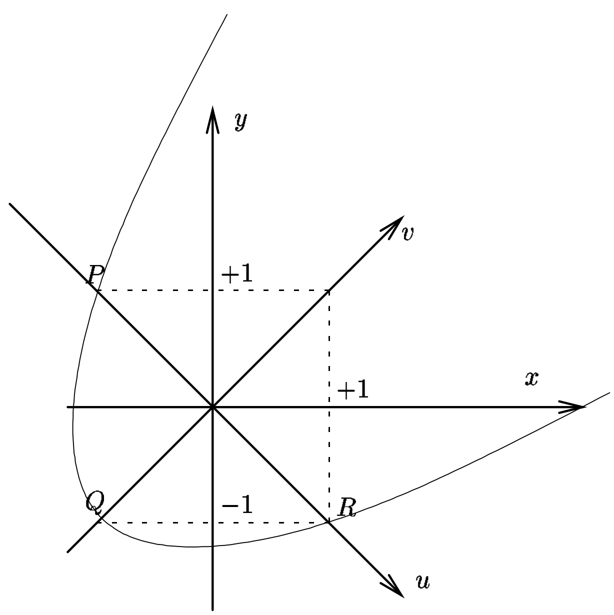
Sean D_A y D_B diagonales y P y Q unitarias tales que $A = PD_AP^t$ y $B = QD_BQ^t$.

(ii.1).- (2.0 pts) Dé una base del conjunto de soluciones $Y \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ del sistema $D_AY = YD_B$.

(ii.2).- (2.0 pts) Use la parte anterior para determinar una base del conjunto de soluciones $X \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ del sistema $AX = XB$.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Determine en los sistemas de coordenadas (u, v) y (x, y) la ecuación de una parábola (como la de la figura de más abajo) que pasa por los puntos P, Q y R.



(ii).- Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibles y $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$.

(ii.1).- (1.5 pts) Sea $P_{A^{-1}B}(\cdot)$ el polinomio característico de $A^{-1}B$. Pruebe que

$$\mathrm{Det}\,(\alpha A + (1-\alpha)B) = (1-\alpha)^n \mathrm{Det}\,(A)\, P_{A^{-1}B}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right).$$

(ii.2).- (1.5 pts) Demuestre que existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha A + (1-\alpha)B$ es invertible.

PROBLEMA 3: [Determinación de la distancia entre dos rectas en $\mathbb{R}^3$]

(i).- Sean $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^t A x - b^t x + c\,.$$

Se quiere minimizar f.

(i.1).- (1.5 pts) Sea $x_0 = \frac{1}{2}A^{-1}b$. Pruebe que $f(x) = (x-x_0)^t A(x-x_0) - x_0^t A x_0 + c$.

(i.2).- (1.5 pts) Concluya que el único mínimo de f se alcanza en x_0, i.e., que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ y que la igualdad se alcanza solamente cuando $x = x_0$,

(ii).- Sean $P, Q, D, E \in \mathbb{R}^3$ tales que $||D|| = ||E|| = 1 > \langle E, D\rangle$. Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned} L_{P,D} &: X(s) = P + sD\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,,\\ L_{Q,E} &: Y(u) = Q + uE\,, \qquad u \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(ii.1).- (1.5 pts) Determine A, b y c como en (i) de forma que

$$f(s,u) = \langle X(s)-Y(u), X(s)-Y(u)\rangle = \begin{pmatrix} s & u \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} - b^t \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} + c\,.$$

Verifique que A es definida positiva.

(ii.2).- (1.5 pts) Concluya que la distancia entre $L_{P,D}$ y $L_{Q,E}$ es $\sqrt{c - \frac{1}{4}b^t A^{-1} b}$, donde A, b y c son como en (ii.1).