Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

EXAMEN II ALGEBRA MA–11A

P1.– a) (3 ptos.) Considere la cónica de ecuación

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy + 4x + 4y = 4$$

Efectúe un cambio de coordenadas de modo que la ecuación resultante no contenga términos lineales ni productos cruzados (del tipo $x'y'$). Escriba la ecuación resultante. Identifique la cónica.

(b) Considere la matriz $H = I_n - 2uu^T$, donde $u \in I\!R^n \setminus \{0\}$ (vector columna) satisface $u^T u = 1$.

(b.1) (0.5 ptos.) Pruebe que $H = H^{-1}$ y $H = H^T$.

(b.2) (1 pto.) Pruebe que u es un vector propio de H y que si $v \in I\!R^n \setminus \{0\}$ es ortogonal a u, es decir $u^T v = 0$, entonces v es vector propio de H.

(b.3) (1 pto.) Calcule los valores propios de H y dé su multiplicidad. Justifique.

(b.4) (0.5 ptos.) Determine si H es definida positiva, justifique.

P2.– Sea $T : P_4(I\!R) \to M_{2\times 2}(I\!R)$ la tranformación definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 & a_3 + a_4 \end{bmatrix}$$

(a) (1.5 ptos.) Probar que T es lineal.

(b) (1.5 ptos.) Encontrar $Ker(T)$ e $Im(T)$ y dar una base y las dimensiones en cada caso.

(c) (1.5 ptos.) Sean $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y $\bar{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Calcular la matriz representante de T con respecto a B y $\bar{B}$.

(d) (1.5 ptos.) Sean $C = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3 + x^4\}$ y $\bar{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ bases de $P_4(I\!R)$ y $M_{2\times 2}(I\!R)$ respectivamente. Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases C y $\bar{C}$ usando matrices de pasaje (las que sirven para pasar coordenadas de B a C y de $\bar{B}$ a $\bar{C}$ respectivamente).

P3.–

(a) (2 ptos.) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con A invertible. Pruebe que $det(AB - \lambda I_n) = det(BA - \lambda I_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) (2 ptos.) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A es diagonalizable y aquellos para los cuales no lo es.

(c) (2 ptos.) Sean $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la proyección ortogonal de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el espacio vectorial generado por u_1 y u_2.

Tiempo: 3 horas
SIN CONSULTAS !!!