U. DE CHILE

INGENIERIA

Examen MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

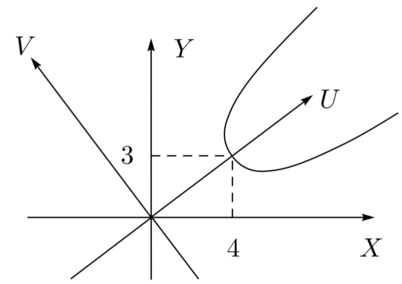
23 de noviembre de 2004

P1.- a) (4 ptos.) Identifique y dibuje la cónica

$$4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y - 7 = 0,$$

encontrando un cambio de variables que permita escribirla de manera centrada con respecto a ejes adecuados. Explicite todos los cambios de variables requeridos.

b) (2 ptos.) La cónica de la figura tiene ecuación $u = 5 + v^2$ donde u y v son variables en los ejes U y V. Encuentre la ecuación de la cónica anterior en las variables x, y (con respecto a los ejes X, Y de la figura).



P2.- a) (1 pto.) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétricas. Demuestre que si A es definida positiva y B es semi-definida positiva entonces $A + B$ es definida positiva.

b) Considere $\{v_1, v_2\}$ un conjunto ortonormal de vectores columna en $\mathbb{R}^n$ y definamos la matriz V de $n \times 2$ cuyas columnas son v_1 y v_2, es decir $V = [v_1 v_2]$. Sea

$$A = I - aVV^t$$

donde a es un parámetro real, $a \neq 0$, e I es la matriz identidad de $n \times n$.

i) (0.5 ptos.) Pruebe la fórmula

$$VV^t x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) (4 ptos.) Muestre que los valores propios de A son $\mathbf{1}$ y $(\mathbf{1} - \mathbf{a})$ y determine la dimensión del espacio propio asociado a cada uno de ellos. Justifique que A es diagonalizable.

iii) (0.5 ptos.) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tales que A es definida positiva.

P3.- Sea S_2 el espacio vectorial de las matrices simétricas de 2×2 con coeficientes reales. Dada $B \in S_2$ considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to S_2$ definida mediante

$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad T(x) = B \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \cdot B.$$

a) (1 pto.) Verifique que $T(x)$ es simétrica para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

b) (2 ptos.) Para $B \in S_2$ una matriz cualquiera, es decir, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de S_2.

c) (2 ptos.) Para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ encuentre una base y la dimensión de $\mathrm{Ker}(T)$. ¿Es T inyectiva?

Entregue una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$. ¿Es T sobreyectiva?

d) (1 pto.) Sea $B \in S_2$ una matriz cualquiera. Pruebe que si B es invertible entonces T es sobreyectiva.

TIEMPO: 3 HORAS