Examen MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

22 de Noviembre de 2005

Pregunta 1. Denotemos por $M_{2,2}$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con coeficientes reales.

Definimos la transformación lineal $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ mediante

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

y utilizamos la notación $id : M_{2,2} \to M_{2,2}$ para la función identidad

$$id \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

a) (1 pto.) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $M_{2,2}$ en el dominio y el recorrido.

b) (1,5 ptos.) Encuentre una base $\mathcal{B}_+$ de $Ker(T + id)$ y dé la dimensión de $Im(T + id)$.

c) (1,5 ptos.) Encuentre una base $\mathcal{B}_-$ de $Ker(T - id)$ y dé la dimensión de $Im(T - id)$.

d) (1 pto.) Verifique que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$ es base de $M_{2,2}$.

e) (1 pto.) Dé la matriz representante de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ en el dominio y el recorrido.

Pregunta 2.

a) (1 pto.) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Pruebe por inducción que

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1.$$

b) (3 ptos.) Considere

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre P invertible y J en forma de Jordan tal que $A = PJP^{-1}$.

c) (2 ptos.) Para la matriz A de la parte anterior y $n \geq 1$ cualquiera calcule A^n explícitamente, encontrando expresiones para los coeficientes de A^n en función de n.

Pregunta 3.

a) (4,5 ptos.) Considere la cónica de ecuación

$$-2x^2 - 12xy + 7y^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x - \frac{30}{\sqrt{5}}y = 0.$$

Realice cambios de variables que permitan expresar la cónica de manera centrada con respecto a ejes adecuados e identifique la cónica. Sea explícito con los cambios de variable y bosqueje la cónica.

b) (1,5 ptos.) Sea M una matriz de $n \times n$ con coeficientes reales, simétrica y definida positiva. Considere la forma cuadrática

$$Q(x) = x^t M x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pruebe que si A es una matriz de $n \times n$ tal que $Q(Ax) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces A es invertible y $Q(A^{-1}x) = Q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ind.: considere el núcleo (o Ker) de A.

TIEMPO: 3:30 horas.