Examan, MA11A Algebra
1 Diciembre, 2003

Problema 1:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Determine todos los valores de α tales que la ecuación corresponde a:

- circunferencia
- elipse
- recta o rectas
- parábola
- hipérbola
- conjunto vacío
- un punto

(6 ptos.)

Problema 2:

(1) Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

tal que $\|v\| = 1$ y considere la aplicación lineal T definida como

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longrightarrow & T(u) = u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces:

(a) Encuentre una base y la dimensión para Ker (T) e Im (T).

(2 ptos.)

(b) Encuentre la matriz A representante de T con respecto a la base canónica.

(0.5 ptos.)

(c) Estudie si la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

(1.5 ptos.)

(2) Sea U un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Sea $T : U \longrightarrow U$, una transformación lineal tal que $T^2 = T \circ T$ es inyectiva. Pruebe que T es biyectiva, es decir, es un isomorfismo.

(2 ptos.)

Problema 3:

(1) Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

(3 ptos.)

(2) Sean U y V dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\dim U \geq 1 \qquad \dim V \geq 1 \qquad U \oplus V = \mathbb{R}^n.$$

(a) Pruebe que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que

$$\text{Ker } A = U \qquad \text{y} \qquad \forall v \in V,\ Av = 2v.$$

(1 ptos.)

(b) Determine si A es diagonalizable y encuentre el polinomio característico de A.

(2 ptos.)