U. DE CHILE

INGENIERIA

Examen de 2ª fecha, MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

20 de diciembre de 2004

P1.- Definamos $\mathcal{P}_k$ como el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k. Considere las transformaciones $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ y $S : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ definidas mediante

$$T[p](x) = (x^2+1)p'(x) + p(x) + p'(0)x \qquad \forall p \in \mathcal{P}_2$$

donde $p'(x) = \frac{dp}{dx}(x)$ es la derivada de $p(x)$, y

$$q \in \mathcal{P}_3,\ q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad S[q](x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

a) (1 pto.) Pruebe que T y S son lineales.
b) (1.5 ptos.) Determine si T es sobreyectiva o inyectiva, y haga lo mismo para S.
c) (2 ptos.) Encuentre bases de $\mathrm{Im}(S \circ T)$ y $\mathrm{Ker}(S \circ T)$.
d) (1.5 ptos.) Encuentre la matriz representante de $S \circ T$ con respecto a la base $\beta = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

P2.- a) (2 ptos.) Determine, justificando apropiadamente, cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables:

$$i)\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ii)\ A_2 = \begin{bmatrix} \pi & 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad iii)\ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) (4 ptos.) Escriba la cónica

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 3\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 5$$

de manera centrada e identifíquela. Explicite todos los cambios de variables requeridos y dibuje la cónica (en los ejes xy originales).

P3.- Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, una transformación lineal. Suponga que que existen vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$T(v_1) = \mu v_1, \qquad T(v_2) = \mu v_2 + v_1.$$

El objetivo de la pregunta es probar que T no es diagonalizable, es decir, no existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de T.

a) (1.5 ptos.) Demuestre que existe una base β de $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz representante de T con respecto a β en los espacios de partida y llegada tiene la forma

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} \mu & 1 & \\ 0 & \mu & C \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

donde C es una matriz de 2 filas y $n-2$ columnas y B es una matriz de $(n-2) \times (n-2)$.

b) (1 pto.) Pruebe que

$$\det(A - \lambda I_n) = (\mu - \lambda)^2 \det(B - \lambda I_{n-2}),$$

donde I_k denota la matriz identidad de $k \times k$.

c) (1 pto.) Sea m_a la multiplicidad algebraica de μ como valor propio de A, y $\tilde{m}_a$ la multiplicidad algebraica de μ como valor propio de B (con la convención $\tilde{m}_a = 0$ si μ no es valor propio de B). Deduzca que

$$m_a = \tilde{m}_a + 2.$$

d) (1.5 ptos.) Pruebe que

$$\dim \mathrm{Ker}(A - \mu I) \leq \dim \mathrm{Ker}(B - \mu I) + 1$$

(Ker es lo mismo que núcleo).

e) (1 pto.) Concluya que T no es diagonalizable.

TIEMPO: 3 HORAS