Examen 2a fecha, MA11A ÁLGEBRA

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

19 de Diciembre de 2005

Pregunta 1. Considere la cónica

$$5x^2 + 5y^2 + 2axy + 8\sqrt{2}x = 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) (5 ptos.) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la cónica es

- una circunferencia
- una elipse
- una parábola
- una hipérbola

b) (1 pto.) Para el caso $a = 3$ bosqueje la cónica resultante (con respecto a los ejes originales).

Pregunta 2. En esta pregunta $\mathcal{P}_k$ denota el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k.

Se define $S : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_3$ mediante

$$S(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

y $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$:

$$T(p(x)) = S\big(p(x)(1 + x + x^2) - p(1)\big).$$

a) (1,5 ptos.) Pruebe que S y T son lineales.

b) (1,5 ptos.) Encuentre la matriz representante de T con respecto a las base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$ en el dominio y recorrido.

c) (1,5 ptos.) Encuentre una base de $Ker(T)$ y una base de $Im(T)$.

d) (1,5 ptos.) Utilizando matrices de cambio de base calcule la matriz representante de T con respecto a la base $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$ en el dominio y recorrido.

Pregunta 3. Considere la recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}x_{n-1}, \quad \forall n \geq 1. \tag{*}$$

a) (1 pto.) Verifique que x_n cumple (*) si y sólo si

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1,$$

y utilice lo anterior para probar por inducción

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1.$$

b) (1 pto.) Calcule los valores propios de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ y los vectores propios asociados.

c) (1,5 ptos.) Encuentre P invertible y J en forma de Jordan tales que $PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$.

d) (2 ptos.) Calcule explícitamente $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n$ para $n \geq 0$.

Ind.: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

e) (0,5 ptos.) Encuentre una fórmula explícita para x_n en función de x_0, x_1 y n para $n \geq 0$.

TIEMPO: 3:30 horas.