Examen MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
24 de Noviembre de 2006

P1. (6.0 ptos.) Sea $p \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy(1 - 2p) = p$$

Determine, cuando existan, los valores del parámetro p para los cuales la ecuación representa:

- Circunferencia
- Hipérbola
- Elipse
- Conjunto vacío
- Recta o rectas
- Un punto
- Parábola

Señale explícitamente que cónicas o conjuntos de los indicados no pueden ser representados por la ecuación dada para ningún valor de p en $\mathbb{R}$.

P2. Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) (1.0 pto.) Demuestre que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 3)^2$$

ii) (2.0 ptos.) Encuentre matrices P y D de modo que $P^t = P^{-1}$ y D diagonal tal que $A = PDP^t$

iii) (2.0 ptos.) Es A invertible?. Calcule bases y dimensiones para el nucleo y la imagen de A, es decir de la transformación $T(x) = Ax$.

iv) (1.0 pto.) Determine los valores propios de $I+A$, para lo cual pruebe que $A+I = P(D+I)P^t$. Estudie si $I + A$ es definida positiva. Justifique.

P3. i) (2.5 ptos.) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica e invertible. Demuestre que A^2 es simétrica definida positiva.

ii) (1.0 pto.) Sean $P, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices ortogonales (recuerde que A invertible se dice ortogonal si y solo si $A^{-1} = A^t$). Demuestre que PQ es ortogonal.

iii) (2.5 ptos.) Demuestre que $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es ortogonal si y solo si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Px, Py\rangle = \langle x, y\rangle.$$

TIEMPO: 3.0 HRS.