Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas No 1, 1999

Lógica y Conjuntos

1.– Test de Conocimiento Básico:

Diga si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

(1) Las proposiciones $\sim p$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ se pueden expresar en términos solamente de p, q, $\wedge$ y $\vee$.
(2) $[(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim p)$ es una tautología.
(3) Las proposiciones $\sim p$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ se pueden expresar en términos solamente de p, q y $\vee$.
(4) $p \Rightarrow q$ implica $q \Rightarrow p$, cualquiera sean las proposiciones p y q.
(5) $p \Leftrightarrow q$ implica $q \Leftrightarrow p$, cualquiera sean las proposiciones p y q.
(6) Se tiene que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A^c \Delta B^c$.
(7) Se tiene que $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
(8) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
(9) Si A y B son conjuntos, entonces $A \cup B$ no contiene a los elementos comunes a ambos conjuntos.
(10) Para que $A \cup B = A$ el conjunto B debe ser vacío.
(11) Se tiene que $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.
(12) La unión del conjunto A con el conjunto B no puede ser igual a $A \setminus B$.
(13) Si A es un conjunto con al menos un elemento y $B \subseteq A$. Nunca se tiene $B \setminus A = B$.
(14) $\mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.
(15) Para cualquier par de conjuntos A y B siempre se tiene que $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
(16) Si $A \cap B = A$ entonces $B \subseteq A$.
(17) Si p, q, r son proposiciones tales que $p \vee r \Rightarrow q$ es falsa independientemente del valor de verdad de r, entonces p es una proposición verdadera.
(18) La proposición compuesta $(p \wedge q) \vee p$ es verdadera sólo cuando q es verdadera.
(19) La negación de la proposición $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, y \in \mathbb{R})\; x+y = 5$ es $(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y \in \mathbb{R})\; x+y < 5 \vee x+5 > 5$.
(20) Las siguientes proposiciones son equivalentes: (1) $(\forall\, x \in \mathbb{Z})(\exists\, y \in \mathbb{N})\; x+y \in \mathbb{N}$, (2) $(\exists\, y \in \mathbb{N})(\forall\, x \in \mathbb{Z})\; x+y \in \mathbb{N}$.
(21) Las siguientes proposiciones son equivalentes: (1) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\forall\, n \in \mathbb{N}),\; x^n \in \mathbb{R}$, (2) $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, x \in \mathbb{R}),\; x^n \in \mathbb{R}$.
(22) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Si es cierta la proposición $(\forall\, A \subseteq E),\; (A \neq \emptyset \Rightarrow A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset)$ entonces $E \subseteq \mathbb{N}$.
(23) Si es cierta la proposición $(\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall\, x \in [0,1])(\exists\, q \in \mathbb{Q}),\; |x-q| < \epsilon$, entonces $\mathbb{Q} \cap [\frac{1}{2}, 1) \neq \emptyset$ también es cierta.
(24) Si A y B son conjuntos entonces $A \Delta B \subseteq A$.
(25) Si A y B son conjuntos entonces $A \setminus B \subseteq A$ y $B \setminus A \subseteq B$.
(26) Si A y B son conjuntos entonces $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ y $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

2.– Problemas.

P1.– Sean p, q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

(i) $p \Rightarrow (p \vee q)$
(ii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(iii) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
(iv) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(v) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
(vi) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$
(vii) $[p \ \wedge (p \ \Rightarrow \ q)] \ \Rightarrow \ q$
(viii) $[(p \wedge \sim q) \ \Rightarrow \sim p] \ \Rightarrow \ (p \Rightarrow \ q)$
(ix) $[(p \ \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \ \Rightarrow \sim p$
(x) $(p \wedge q) \ \Leftrightarrow \ [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$
(xi) $(p \wedge q \Rightarrow r) \ \Leftrightarrow \ (p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q)$
(xii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

P2.– Sean p y q proposiciones. Se define la proposición "ni q ni p", la que denotamos por $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	**q**	**p ↓ q**
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(i) Probar que $\sim p \ \Leftrightarrow \ (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \downarrow q)$.
(ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo $\downarrow$ y $\sim$.

P3.– Sean p y q proposiciones. Definamos la proposición,

$$(p \vdash q) \ \Leftrightarrow \ (\text{Existe una proposición } r \text{ tal que } (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)).$$

Pruebe que $p \vdash q \ \Leftrightarrow \ p \Rightarrow q$.

P4.– Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa, $(p \Leftrightarrow \sim \ q)$ es verdadera y $(q \Rightarrow r)$ es verdadera. Deduzca el valor de verdad de p.

P5.– Negar las siguientes proposiciones:

(i) $(\exists \ x \in \mathbb{R})(\forall \ y \in \mathbb{R}) \ x < y$
(ii) $(\forall \ x \in \mathbb{R})(\forall \ y \in \mathbb{R}) \ x \geq y$
(iii) $(\exists \ x \in \mathbb{R})(\forall \ y \in \mathbb{R}) \ x > 1 \ \wedge \ y \leq 1$
(iv) $(\forall \ \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \ n_0 \in \mathbb{N})(\forall \ n > n_0) \ |a_n| < \epsilon$

P6.– Probar que toda proposición compuesta formada a partir de disyunciones, conjunciones y negaciones de proposiciones simples es equivalente con una proposición donde sólo aparecen los conectivos lógicos de implicancia ($\Rightarrow$) y negación ($\sim$).

P7.– Sean A, B, C conjuntos. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que:

(i) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
(ii) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$
(iii) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
(iv) $A \subseteq B \subseteq C \ \Rightarrow \ C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$
(v) $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \ \Leftrightarrow \ A = \emptyset$
(vi) $(A \cap B \cap C = \emptyset) \ \Rightarrow \ [(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup B \cup C]$
(vii) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
(viii) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$
(ix) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$
(x) $(A \cup B = A \cap C) \Rightarrow (B \subseteq A \wedge A \subseteq C)$

(xi) $(A \cap C = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
(xii) $A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$
(xiii) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (A \Delta C)$

P8.– Sea A un subconjunto fijo del conjunto U. Probar que para todo par de subconjuntos X, Y de U se tiene,

$$X = Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A.$$

P9.– Sea B un subconjunto del conjunto U. Pruebe que,

$$[(\forall A \subseteq U)(A \cup B = A)] \Rightarrow B = \emptyset.$$

P10.– Sean $A \subset U$ dos conjuntos. Colocar el signo de inclusión, igualdad o ninguno de ellos según corresponda entre los conjuntos siguientes:

(i) $\mathcal{P}(A \cup B)$ y $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(ii) $\mathcal{P}(A \cap B)$ y $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(iii) $\mathcal{P}(U \setminus A)$ y $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A)$

P11.– Dar los elementos del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

P12.– (a)

(i) Construya la proposición lógica que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p, q, r es verdadera. Entregue una forma reducida de la proposición.

(ii) Compare la proposición obtenida en el punto anterior con la proposición $(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$, donde $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$.

(b) Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:
$(x \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in A$, $(x \notin A \vee y \in A) \Rightarrow y \notin B$.
Probar que $y \notin B$ es verdadera.

(c) Sean A, B, C conjuntos. Probar que $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap C = C \setminus B$.

P13.– (a)
(i) Sean p, q, r proposiciones. Construir la proposición compuesta "s" (en función de p, q, r) cuya tabla de verdad es:

p	**q**	**r**	**s**
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(ii) Probar que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ es una tautología.

(b) Sean A, B, C conjuntos. Probar que $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.

P14.– Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) \ / \ A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

(i) $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.
(ii) $A \in M \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.
(iii) $(\forall X \in M)(\forall Y \in \mathcal{P}(E))\ X \cap Y \in E$.

(iv) $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

P15.–
(i) Negar la proposición siguiente:

$$(\forall\ x \in \mathbb{Q})(\forall\ \epsilon > 0)(\exists\ y \in \mathbb{Q}^c)\ \epsilon/3 < |x - y| < \epsilon/2.$$

(ii) Indique el valor de verdad de las proposiciones cuantificadas siguientes,
(a) $(\exists\ n \in \mathbb{N})(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ m \in \mathbb{N})\ \ n(x^2 - mx) \leq 0$.
(b) $(\forall\ x \in A)(\exists\ \delta > 0)\ \ x^2 > \delta$, donde $A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 0 < x < 10\}$.

P16.– Sean las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ tales que $[(p_1 \underline{\vee} p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_4)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de:

(i) $(p_5 \Rightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2)$
(ii) $[(p_5 \Rightarrow p_2) \vee \sim p_1] \Rightarrow (p_4 \vee p_3)$
(iii) $\sim [(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)] \Leftrightarrow (p_4 \Rightarrow p_3)$

P17.– Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d.

(i) Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.
(ii) Demostrar que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S.
(iii) Sea $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$. Probar que el origen no es un punto aislado de S.

P18.– (a) Si q y r son proposiciones no equivalentes. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$[\sim (q \vee r) \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\sim s \vee q)]$$

(b) Si la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa. Cual es el valor de verdad de la proposición $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q$.
(c) Considere el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

$$(\forall\ x, y \in A)\ \ (x + y \leq 1)$$

$$(\forall\ x \in A)(\exists\ y \in A)\ \ (x^2 \leq y)$$

Escriba la negación de las proposiciones anteriores.

P19.– Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama Algebra de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

(i) $E \in M$
(ii) $(\forall\ A, B \in M)\ A \cup B \in M$
(ii) $(\forall\ A \in M)\ A^c \in M$

Se pide:

(a) Demostrar que $\emptyset \in M$
(b) Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \cap B \in M$
(c) Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \Delta B \in M$
(d) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, averiguar si $M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es un Algebra. Si no lo es, agregar el menor número de conjuntos para que lo sea.

P20.– (a) Sean A y X conjuntos. Demostrar que $\{[(A \cup X) \setminus (A \Delta X)] \cup [(A \cup X) \setminus A]\} = X$
(b) Dados A, B, C conjuntos, aprovechar el resultado entregado en (a) para determinar un conjunto X tal que $(A \Delta X = B)$ y $(A \cup X = C)$.
(c) Probar que en el caso $B = C$ el conjunto X es disjunto con A.

P21.–
(i) Sean p, q y r proposiciones tales que $((\sim p \vee q) \Rightarrow r)$ es falsa. Entregar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justifique su respuesta):

(a) $\sim q \Rightarrow \sim p$
(b) $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim (q \vee r))$

(ii) Sean p, q y r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s))$$

P22.–
(a) Sean p, q, r proposiciones. Averiguar si la equivalencia $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q$ puede ser verdadera sin que lo sea la implicancia $p \Rightarrow q$.

(b) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)).$$

(c) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \bar{r}).$$

Funciones

1.– Test de Conocimiento Básico:

Diga si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

(1) La composición de funciones inyectivas es inyectiva, pero la composición de funciones sobreyectivas no lo és.
(2) Siempre se pueden construir funciones inyectivas entre conjuntos finitos.
(3) Siempre se pueden construir funciones sobreyectivas entre conjuntos finitos.
(4) Para que la composición de dos funciones sea inyectiva es necesario que al menos una de ellas lo sea.
(5) Para que la composición de dos funciones sea sobreyectiva es necesario que al menos una de ellas lo sea.
(6) Si $h = f \circ g$ es la función que resulta al componer las funciones f y g, entonces h es inyectiva si g lo es.
(7) Sea $h = f \circ g$ la función que resulta al componer las funciones f y g. Si h es inyectiva luego g también lo es.
(8) Sea $h = f \circ g$ la función que resulta al componer las funciones f y g. Si h es inyectiva luego f también lo es.
(9) Sea $h = f \circ g$ la función que resulta al componer las funciones f y g. Si h es sobreyectiva luego f también lo es.
(10) Sea $h = f \circ g$ la función que resulta al componer las funciones f y g. Si h es sobreyectiva luego g también lo es.
(11) La inversa de una función biyectiva es biyectiva.
(12) Sea $f : A \to B$ una función. Se tiene que para $C, D \subseteq B$, $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
(13) Sean $f : A \to B$ una función y $C \subseteq A$. Se tiene que $f^{-1}(f(C)) = C$.
(14) Sea S un conjunto finito. Si $f : S \to S$ es sobreyectiva entonces f es inyectiva.
(15) Sea S un conjunto finito. Si $f : S \to S$ es inyectiva entonces f es sobreyectiva.
(16) Sea $f : S \to S$ una función. Si f es inyectiva entonces es sobreyectiva.

(17) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Si $g(f(A)) = C$ entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
(18) Sean $f : A \to B$ una función y $x \in B$, entonces $f^{-1}(\{x\})$ tiene un único elemento.
(19) Sean $f : A \to B$ una función y $x \in A$, entonces $f(\{x\})$ tiene un único elemento.
(20) Sea $f : A \to B$ una función. Si $\forall\, y \in B,\ f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ entonces f es sobreyectiva.
(21) Si $f : A \to B$ es una función y $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ entonces $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.
(22) Si $f : A \to B$ es una función y $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$ entonces $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.
(23) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Si $C = A$ entonces se puede definir $f \circ g$ y $f \circ g = g \circ f$.
(24) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
(25) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

2.– Problemas.

P1.– Sean $f : E \to F$ y $g : F \to E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y que g es sobreyectiva.

P2.– Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$.
(i) Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
(ii) Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.
(iii) Calcular $g \circ f(A)$ y $(f \circ g)^{-1}(A)$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

P3.– Sea la función $f : [3, +\infty) \to [2, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en cada $x \geq 3$. Demostrar que f es biyectiva y determinar f^{-1}.

P4.– Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y $f : A \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x$, en cada $x \in A$.
(i) Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$ entonces f es inyectiva.
(ii) Si $A = \mathbb{R}$ determinar $f(A)$.

P5.– Sea $f : E \to F$ una función. Probar que f es biyectiva sí y sólo sí
$[(\forall\, B \subseteq E)\ f(B^c) = (f(B))^c]$.

P6.– Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función sobreyectiva.

P7.– Sea $f : E \to F$ una función. Se dice que un subconjunto A de E es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$.
(i) Probar que si A y B son subconjuntos estables de E entonces A^c, $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.
(ii) Probar que f es inyectiva sí y sólo sí todo subconjunto de E es estable.

P8.– Sean $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ dos funciones biyectivas. Definimos $\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \to A' \ / \ h \text{ es una función }\}$ y $\mathcal{F}_{B,B'} = \{\bar{h} : B \to B' \ / \ \bar{h} \text{ es una función }\}$. Considere además la función $\psi : \mathcal{F}_{A,A'} \to \mathcal{F}_{B,B'}$ tal que a cada $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ le asocia la función $\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.
(i) Probar que ψ es una biyección.
(ii) Probar que h es inyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es inyectiva.
(iii) Probar que h es sobreyectiva sí y sólo sí $\psi(h)$ es sobreyectiva.

P9.– Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x + 1$.
(i) Probar que f es una función biyectiva.
(ii) Probar que no es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualquier par de reales x e y.

P10.– Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.
(i) Verificar que f, g y h son invertibles.
(ii) Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.
(iii) Deducir de (ii) que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$.

P11.– Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$ (fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que: $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$, para todo $X \subseteq E$.
(i) Determinar $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(A^c)$ y $f(E)$.
(ii) Demostrar que $g \circ f = f \circ g$.
(iii) Determinar si f y g son sobreyectivas.
(iv) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.
(v) Determinar un conjunto A para el cual g es biyectiva.

P12.– Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ la función que a todo $X \subseteq E$ le asigna $f(X) = E \setminus X$.
(i) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f.
(ii) Determinar $f \circ f$ y f^{-1} si existen.
(iii) Suponga que $E = \{0, 1, 2\}$. Si $A = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ y $B = \{\emptyset, \{1\}\}$, calcular $f(A)$ y $f^{-1}(B)$.

P13.– Sea $f : E \to F$ una función y $A, B \subseteq E$.
(i) Demostrar que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
(ii) Qué condición debe cumplir f para que $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?
(iii) Qué condición debe cumplir f para que $f(E \setminus B) = F \setminus f(B)$?

P14.– Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se define la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula $f_{a,b}(x) = ax + b$ en cada $x \in \mathbb{R}$.
(i) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$.
(ii) Para $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva.
(iii) Para $a \neq 0$ determine $f_{a,b}^{-1}$.
(iv) Para $a \neq 0$ determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$.

P15.– Considere $A = \{1, ..., n\}$. Sea $B \subseteq A$, $B \neq A$, un subconjunto estricto de A. Defina $G_B = \{f : A \to A \ / \ f$ es biyección y $f(i) = i, \ \forall\, i \in B\}$ el conjunto de todas las biyecciones que dejan invariante B.
(i) Pruebe que $G_B \neq \emptyset$.
(ii) Pruebe que si $f \in G_B$ y $g \in G_B$ entonces $g \circ f \in G_B$.
(iii) Pruebe que si $f \in G_B$ entonces $f^{-1} \in G_B$.

P16.– Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n + m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m.
(i) Probar que $f(0) = 0$.
(ii) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.
(iii) Pruebe que f es inyectiva sí y sólo sí $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

P17.– Sea $f : E \to F$ una función.

(a) Pruebe que $\forall\ A \subseteq F,\ f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

(b) Pruebe que $\forall\ A \subseteq F,\ \forall\ B \subseteq F,\ f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

P18.–
(i) Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.

(a) Determine si f, g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

(b) Determine los conjuntos preimagenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$.

(ii) Sea $E = \{\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f$ es biyectiva $\}$. Es decir E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\psi : E \to E$ tal que para cada $f \in E$, $\psi(f) = f^{-1}$, es decir ψ le asocia a cada función en E su inversa.

(a) Probar que ψ es biyectiva.

(b) Sean f, $g \in E$. Probar que $\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$.

P19.– (a) Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene,

(a.1) $A\Delta B = A\Delta C \;\Rightarrow\; B = C$,
(a.2) $A\Delta B = C \;\Rightarrow\; B = A\Delta C$,

(b) Sea E un conjunto y A un subconjunto de E. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X\Delta A$ para cada $X \subseteq E$. Probar que f es biyectiva y determine la función inversa de f.

P20.–
(a) Sea $f : E \to F$ una función y A, B subconjuntos de E. Pruebe que

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \;\Rightarrow\; f(A \cup B) = f(A).$$

(b) Sea $f : E \to F$ una función que satisface la propiedad

$$\forall\, A, B \subseteq E,\ (A \subseteq B \wedge A \neq B \;\Rightarrow\; f(A) \neq f(B)).$$

Probar que f es inyectiva (Indicación: utilice la propiedad de f con A y B adecuados).

(c) Sean $g : I\!R \to I\!R$ y $f : I\!R \to I\!R$ funciones. Determine explícitamente f y g sabiendo que $g \circ f(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5}$ y $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ en cada $x \in I\!R$.