Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas 3 , 2003

1 Estructuras Algebraicas, Números Complejos y Polinomios.

1. Sea $(G,*)$ un grupo y H un subconjunto de G tal que $x*H = H*x$, donde $x*H = \{x*h/h \in H\}$ y $H*x = \{h*x/h \in H\}$. Se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}_H$ en G como:

$$x\mathcal{R}_H y \Longleftrightarrow x*y^{-1} \in H$$

   (a) Probar que $*$ es compatible con $\mathcal{R}_H$, es decir:

$$x\mathcal{R}_H y \ \wedge \ z\mathcal{R}_H w \implies (x*z)\mathcal{R}_H(y*w)$$

   (b) Probar que $[x]_{\mathcal{R}_H} = \{y \in G/y = h*x \text{ para algún } h \in H\}$.

   (c) Se define para las clases de equivalencia de $\mathcal{R}_H$:

$$[x]_{\mathcal{R}_H} \odot [y]_{\mathcal{R}_H} = [x*y]_{\mathcal{R}_H}$$

   Probar que la operación está bien definida.

   (d) Probar que $(G/H,\odot)$ es un grupo (que se llama grupo cuociente) donde $G/H = \{[x]_{\mathcal{R}_H}/x \in G\}$. Probar que $[e]_{\mathcal{R}_H} = H$, donde e es el neutro de $(G,*)$.

2. (a) Calcule

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{1-i}\right)^{40}$$

   (b) Sabiendo que el polinomio

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$$

   posee sólo raíces complejas y que una de ellas tiene módulo 2, encuentre todas las raíces del polinomio.

3. (a) Determine todos los números complejos tales que $\mid z-2 \mid = 1$.

   (b) Resuelva la ecuación en $\mathbb{C}$, $z^5 = i$.

   (c) Dibuje la región $\{z \in \mathbb{C}/ \mid z-2 \mid \leq \mid z-1 \mid\}$.

4. Sea $(G,\otimes)$ un grupo y $(H,\otimes)$ un subgrupo de $(G,\otimes)$. Se define para $a \in G$ y $b \in G$:

$$a \otimes H = \{a \otimes h/h \in H\}$$

   Probar que:

   (a) Si $g \in H \Longrightarrow g \otimes H = H$.

   (b) Si $a \otimes H \cap b \otimes H \neq \emptyset \Longrightarrow a \otimes H = b \otimes H$.

5. Sea U un conjunto no vacío cualquiera y sea $\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2)$ el conjunto de las funciones de U en $\mathbb{Z}_2$. A todo subconjunto $X \subseteq U$ le asociamos la función $\mathbb{1}_X : U \to \mathbb{Z}_2$ tal que,

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin X \\ 1 & \text{si } x \in X \end{cases}$$

que se denomina la indicatriz del conjunto X.

   (a) Probar que si $f \in \mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2)$ entonces existe $X \subseteq U$ tal que $f = \mathbb{1}_X$.

   (b) Sobre $\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2)$ se definen las siguientes operaciones:

$$(\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) +_2 \mathbb{1}_B(x)$$
$$(\mathbb{1}_A \bullet \mathbb{1}_B)(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot_2 \mathbb{1}_B(x)$$

   donde $A, B \in U$ y $x \in U$.

   Demuestre que $(\mathcal{Y}(U,\mathbb{Z}_2), \oplus, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad.

6. Sea $f : (\mathbb{Z}_m, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera. Demuestre que f es la función constante 0.

   Indicación: Recuerde que en $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$: $[1] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1] = 0$ (m veces).

7. Realice las siguientes divisiones :

   - $x^n - a^n \div x - a$.
   - $x^n + a^n \div x - a$.
   - $i \cdot z^3 + (3 + 8 \cdot i) \cdot z^2 + (-1 + 19 \cdot i) \cdot z + 3 \cdot z \cdot i - 40 \div i \cdot z + 4 + 5 \cdot i$.

8. Dado un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se define :

$$L(p)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

   (a) Demuestre que si $p(x), q(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente, entonces:

$$L(p \cdot q) = L(p) \cdot q + p \cdot L(q)$$

   (b) Pruebe por inducción sobre n, que si $p(x) = (x-d)^n$, entonces $L(p)(x) = n \cdot (x-d)^{n-1}$.

   (c) Si α es una raíz de multiplicidad m de un polinomio $p(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \geq 2$, entonces α es una raíz de multiplicidad $(m-1)$ del polinomio L(p)(x).

9. (a) Se sabe que $1+i$ es una raíz de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$. Determine las otras raíces de p(x).

   (b) Sea $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$. Sean x_i con $i = 1, 2, ..., n$ las raices del polinomio p(x). Determine las raices del polinomio $g(x) = a_0 \mu^n x^n + a_1 \mu^{n-1} x^{n-1} + ... + a_{n-1} \mu x + a_n$ con $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

   (c) Determine las raíces del polinomio :

$$16x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 8x + 10$$

10. En este problema demostraremos el llamado Teorema de Interpolación.

    Sea K cuerpo, $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in K$, con $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Entonces existe un único polinomio de grado menor o igual a $n-1$ en $K[x]$ tq $\forall j = 1, ..., n \quad p(x_j) = y_j$.

    Llamemos a este polinomio, polinomio de interpolación de la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ , \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$

(a) Suponiendo la existencia de p(x), demuestre la unicidad.

(b) Para cada $j = 1, ..., n$ definimos:

$$l_j(x) = \frac{\prod_{k=1\,(k\neq j)}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=1\,(k\neq j)}^{n}(x_j - x_k)} \in K[x]$$

i. Determine el grado de $l_j(x)$ y pruebe que :

$$l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r \\ 0, & j \neq r \end{cases} \qquad \forall\, j, r = 1, ..., n$$

ii. Demuestre que $p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x) \in K[x]$ es polinomio de interpolación para la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^{n}\ ,\ \{y_j\}_{j=1}^{n}\right)$.

11. Sea $J_2 = \{p(x) \in P(x)/\ gr(p) \leq 2,\ a_0 = 0,\ a_1 \neq 0\}$. En J_2 se define la l.c.i. $\triangle$ a través de $p(x)\triangle q(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i x^i$ en que $p(q(x)) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$.

    (a) Probar que $(J_2, \triangle)$ es un grupo no abeliano.

    (b) Sea $f : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tq $f(a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) = a_1$. Probar que f es un homomorfismo epiyectivo de $(J_2, \triangle)$ en $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$.

    (c) Sea $H = \{p(x) \in J_2/a_1 = 1\}$. Probar que $(H, \triangle)$ es subgrupo abeliano de $(J_2, \triangle)$.

12. Sea $n > 2$, sea $a = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y sean $X, Y \in M_{nn}(\mathbb{C})$ las matrices definidas por $(X)_{jk} = a^{(j-1)(k-1)} \qquad (Y)_{jk} = a^{-(j-1)(k-1)}$.

    (a) Calcular X^2.

    (b) Calcular XY.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fijo.

    (a) Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a cero.

    (b) Demuestre que las raíces n-ésimas de un número complejo cualquiera $Z \in \mathbb{C}$, son el producto se una raíz particular $z_0 \in \mathbb{C}$ por una raíz n-ésima de la unidad.

    (c) Concluya que la suma de las raíces n-ésimas de un complejo cualquiera, es igual a cero.

14. Sea I un subgrupo del grupo de los polinomios $\mathbb{R}[x]$. Sea $A = \{g(x) \in I/gr(g(x)) \geq 0\}$. Supongamos que I es tal que

    - $I \neq \{0\}$.
    - $(\forall p \in I) \qquad (\forall q \in \mathbb{R}[x]) \qquad p \cdot q \in I$.

    Probar que $(\forall g \in I) \qquad (\exists f \in A) \qquad f|g$.

15. Sean $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p(x)) \geq 4$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Se sabe que :

    - El resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)$ es cx.
    - El resto $r(x)$, de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio "mónico", es decir, el coeficiente asociado a x^n, donde $n = gr(r(x))$, es igual a 1.

    (a) Determine los valores $p(b)$ y $p(-b)$.

    (b) Justifique que $gr(r(x)) \leq 2$.

    (c) Determine $r(x)$

16. Sea α una raíz séptima de la unidad distinta de 1. Pruebe que :

   (a) $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0$.

   (b) $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}+\frac{\alpha^3}{1+\alpha^6}=-2$.

17. (a) Sea $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ función. Se dirá que f es lineal afín si $\exists\, a,b\in\mathbb{Q}\ a\neq 0$, tal que $f(x)=a\cdot x+b\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Sea

$$I=\{f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}\ funcin/f\ es\ lineal\ afn\}.$$

   Probar que $(I,\circ)$ es un grupo, donde $\circ$ es la composición de funciones.

   (b) Considere $(\mathbb{Q},+),((\mathbb{Q}\backslash\{0\}),\cdot)$. En $(\mathbb{Q}\backslash\{0\})\times\mathbb{Q}$ se define la siguiente l.c.i.

$$(a,b)*(c,d)=(a\cdot c,b+a\cdot d)$$

   Probar que $((\mathbb{Q}\backslash\{0\})\times\mathbb{Q},*)$ es un grupo.

   (c) Demuestre que $((\mathbb{Q}\backslash\{0\})\times\mathbb{Q},*)$ es isomorfo a $(I,\circ)$.

18. Sea $(E,*)$ una estructura algebraica y sea R una relación de equivalencia en E que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall\, x_1,x_2,y_1,y_2\ \in E)\qquad x_1Rx_2\wedge y_1Ry_2\Rightarrow(x_1*y_1)R(x_2*y_2).$$

Definimos una nueva l.c.i. $\otimes$ en el conjunto cuociente E/R mediante:

$$[x]\otimes[y]=[x*y].$$

   (a) Justifique que $\otimes$ está bien definida, es decir pruebe que la clase de $x*y$ no depende de los representantes de [x] y de [y] que se escojan.

   (b) Muestre que si $(E,*)$ es un grupo, entonces $(E/R,\otimes)$ también es un grupo.

19. (a) Considere el subconjunto de los números complejos $H=\{a+bi/\ a,b\in\mathbb{Z}\}$.

      i. Pruebe que $(H,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad sin divisores del cero.

      ii. Pruebe que los elementos invertibles de H con respecto a la multiplicación son 1, -1, i, $-i$.

      iii. Demuestre que un número primo x se puede escribir como producto $x=z_1\cdot z_2$, donde z_1 y z_2 son elementos no invertibles con respecto a la multiplicación en H, sí y sólo sí $x=a^2+b^2$ con $a,b\in\mathbb{N}$

   (b) Sea $n\geq 2$. Probar que las raíces en $\mathbb{C}$ de $p(x)=1+x+x^2+...+x^{n-1}$ son las raíces n-ésimas de la unidad distintas de uno.

20. (a) Sea $p\in K[x]$ un polinomio de grado 2 o 3. Demuestre que p es irreducible sí y sólo sí p no tiene raíces en K.

   (b) Sea $p\in\mathbb{C}[x]$ y $a\in\mathbb{C}$ una raíz de p. Si $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, se define el polinomio $D(p)$ tal que $D(p)(x)=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}$. Se sabe que si $p,q\in\mathbb{C}[x]$ entonces $D(p\cdot q)(x)=D(p)(x)q(x)+p(x)D(q)(x)$. Probar que $D(p)(a)=0$ sí y sólo sí $(x-a)^2$ divide a $p(x)$.

21. (a) Sea $f:(A,*)\rightarrow(B,\Delta)$ un morfismo.

      i. Probar que Δ es una ley de composición interna en $f(A)$.

      ii. Probar que $(f(A),\Delta)$ es un grupo si $(A,*)$ es un grupo.

(b) Considere la operación definida en $\mathbb{Z}$ por $n * m = n + m - 1$. Pruebe que $(\mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ son isomorfos.

22. (a) Sea $(\mathcal{G}, *)$ un grupo y $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in \mathcal{G}$ (recordar que g^{-1} es el inverso de g para la operación $*$). Probar que

$$f \text{ es un isomorfismo } \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ es un grupo Abeliano.}$$

(b) Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación definida por $(a, b) \oplus (\bar{a}, \bar{b}) = (a +_2 \bar{a}, b +_3 \bar{b})$.

i. Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.

ii. Construya un isomorfismo

$$f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \text{ tal que } f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3).$$

Concluya que es único.

23. (a) Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la propiedad $\forall\, a, b \in G,\ (a * b)^2 = a^2 * b^2$. Probar que $(G, *)$ es un grupo Abeliano.

(b) Sean $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax + b\}$ y $\bar{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\, b \in \mathbb{R}, f(x) = x + b\}$. Sabiendo que $(G, \circ)$ es un grupo, probar que $(\bar{G}, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

24. (a) Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^n = -1$ para $n \geq 2$.

(b) Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte i es cero.

Indicación: Recuerde que $\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$ si $r \neq 1$.

(c) Pruebe que $\frac{(1+i)^{24}}{(1-i)^{20}} = -4$

25. (a) Calcule las raíces de $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$.

(b) Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$

(c) Pruebe que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1 - i)^n + (1 + i)^n \in \mathbb{R}$.

26. (a) Sea $p(X) = X^3 + a\, X^2 + b\, X + \ c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $r(X)$ el resto de la división de $p(X)$ por $(X - 1)$. Si $r(4) = 0$ y $X = i$ es raíz de $p(X)$, calcule a, b, c.

(b) Sea $p(X) = a_0 + a_1\ X + ... + a_{n-1}\ X^{n-1} + X^n$, con $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tal que $p(X)$ tiene n raíces distintas en $\mathbb{C}$ y si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(X)$ entonces su conjugado $\bar{z}$ también lo es. Demuestre que $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Indicación: estudie el producto de polinomios $(X - z)(X - \bar{z})$ *donde* $z \in \mathbb{C}$.

27. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$ y

$$A = \{F : G \to G \ / \ F \text{ es un isomorfismo de } (G, *) \text{ en } (G, *)\}.$$

(a) Probar que $(A, \circ)$ es un grupo ($\circ$ es la composición de funciones).

(b) Para cada $g \in G$ se define la función $F_g : G \to G$ tal que $F_g(x) = g * x * g^{-1}$ en cada $x \in G$. Pruebe que:

i. F_g es un homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

ii. $F_{g*h} = F_g \circ F_h$, para todo $g, h \in G$.

iii. $F_e = Id$ (Id es la función identidad en G).

Concluya que F_g es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

(c) Pruebe que $B = \{F_g \ / \ g \in G\}$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.

28. (a) Sea $(G, *)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto

$$H * K = \{h * k \ / \ h \in H, k \in K\}$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G.

(b) Sea $(G, *)$ un grupo tal que para cada $g \in G$ existe $n \geq 1$ tal que $g^n = g * ... * g$ (n-veces) $= e$ (el neutro de G). Probar que el único homomorfismo $F : (G, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0$ en cada $g \in G$.

(c) Sea $(G, *)$ un grupo que satisface la propiedad $a * a = e$ (el neutro del grupo) en cada $a \in G$, es decir, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo Abeliano. (Ind: calcule $(a * b) * (b * a)$).

29. (a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1 + z^n} + \frac{1}{1 + (\bar{z})^n},$$

(donde $\bar{z}$ es el conjugado de z) es un número real.

(b) Exprese en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ (es decir, resuelva $z^4 = z_0$)

(c) Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y sólo sí $z_1 = z_2$. (Indicación: Pruebe que $|z| = 1$ y $Re(z) = 1$ si y sólo sí $z = 1$.)

30. Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.

(a) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es una anillo conmutativo con unidad.

(b) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ posee divisores del cero.

(c) Se dice que $(R_\triangle, \triangle\!\!\!+, \triangle)$ y $(R_\diamond, \diamond\!\!\!+, \diamond)$ son isomorfos si existe $\varphi : R_\triangle \to R_\diamond$ biyección tal que

$$\forall x, y \in R_\triangle, \quad \varphi(x \triangle\!\!\!+ y) = \varphi(x) \diamond\!\!\!+ \varphi(y) \ \text{ y } \ \varphi(x \triangle y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y).$$

Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

31. Considere los números reales $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \cdot \alpha)$ y $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k \cdot \alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Probar la igualdad de números complejos

$$S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n$$

(ii) Escriba el número complejo $1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ en forma polar y deduzca que

$$S = 2^n (\cos(\alpha/2))^n \cdot \cos(n \cdot \alpha/2) \text{ y } S' = 2^n (\cos(\alpha/2))^n \cdot \sin(n \cdot \alpha/2)$$

(recuerde que: $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$)

32. (i) Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con elemento neutro $e \in A$ y asociativa. Se define el conjunto

$$B = \{x \in A \mid \exists y \in A,\ x * y = y * x = e\},$$

es decir, $x \in B$ sí y sólo sí x tiene inverso para la operación $*$ en A. Probar que $*$ es cerrada en B y que $(B, *)$ es un grupo.

(ii) Considere el conjunto

$$\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean

$$A_1 = \{1, 12\}, A_2 = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}, A_3 = \{1, 5, 8, 12\}.$$

Señale cual de los conjuntos anteriores con la operación $\cdot_{13}$ es un grupo y cual no es un grupo con la misma operación. Justifique claramente su respuesta.

33. (a) Se define el conjunto $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(i) Probar que $(S_1, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación de números complejos, es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(ii) Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad. Probar que la función $f : \mathbb{Z}_3 \to S_1$ definida en cada $a \in \mathbb{Z}_3$ como $f(a) = w^a$ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(S_1, \cdot)$. Recuerde que $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y $+_3$ es la suma módulo 3 en $\mathbb{Z}_3$.

(iii) Pruebe que si $g : (\mathbb{Z}_3, +_3) \to (S_1, \cdot)$ es un homomorfismo, entonces existe una raíz cúbica de la unidad $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(a) = w^a$ en todo $a \in \mathbb{Z}_3$.

(b) Pruebe que el producto de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.

34. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$. Sea $\preceq$ una relación de orden sobre G tal que

$$\forall x, y, z/, \in G : \quad (x \preceq y) \Longrightarrow (x * y \preceq y * z).$$

Sea $G_+ = \{x \in G : e \preceq x\}$ y $G_- = \{x \in G : x \preceq e\}$. Entonces, demuestre que:

(a) $G_+ \cap G_- = \{e\}$.

(b) $(\forall x \in G)\ \left(x \in G_+ \Longrightarrow x^{-1} \in G_-\right)$.

(c) $(G_+, *)$ es una estructura algebraica.

(d) Si la relación $\preceq$ es de orden total, entonces $G_+ \cup G_- = G$.

(e) Si $G_+ \cup G_- = G$, entonces la relación de orden $\preceq$ es total.

35. Sea $(H, +)$ un subgrupo de $(Z, +)$ con $H \neq \{0\}$.

(a) Pruebe que $\{h \in H : h > 0\} \neq \emptyset$.

(b) Considere $d = \min\{h \in H : h > 0\}$. Se define el conjunto

$$d\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}, x = dk\}.$$

Demuestre que $d\mathbb{Z} \subset H$.

36. Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determinar todas las soluciones (en $\mathbb{C}$) de la ecuación.

37. Expresar en la forma $a + ib$ el complejo $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$.

38. Sean $F, G, H, R, R' \in \mathbb{K}[x]$ polinomios tales que $G, H \neq 0$. Si el resto de dividir F por $G \cdot H$ es R y el resro de dividir R por G es R', determine el resto de dividir F por G.

39. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ las raices n-ésimas de la unidad.

    (a) Verifique que

    $$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\omega_l^m = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ divide a } m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    (b) Sea $P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ y $m \in \mathbb{N}, m < n$. Probar que $\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} P(\omega_l) = a_0$.

40. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ y sean $f, g : U \longrightarrow U$ tales que $f(z) = \overline{z}$ y $g(z) = i \cdot z$.

    Para cualquier función $h : U \longrightarrow U$ se define $h^0 = id_U$ y $h^n = \overbrace{h \circ \ldots \circ h}^{\text{n veces}}$, si $n = 1, 2, \ldots$ Si además h es biyectiva se define $h^n = (h^{-1})^{|n|}$, si $n = -1, -2, \ldots$, y se tiene que $h^n \circ h^m = h^{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, y que $(\{h^p \,:\, p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es un grupo.

    (a) verifique que f y g son biyectivas y que $f \circ g \neq g \circ f$. Probar admás que si $p \in \mathbb{Z}$, entonces

    $$g^p(z) = i^p \cdot z, \qquad \text{y} \qquad f^p = \begin{cases} id_U & \text{si } p \text{ es par} \\ f & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

    (b) Demuestre que $(\{f^p : p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es isomorfo a $(\{-1, +1\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{R}$.

    (c) Probar que para todo $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $(f^m \circ g^n) \circ (f^p \circ g^q) = f^s \circ g^t$.

    (d) Sea $\mathcal{G} = \{f^m \circ g^n : U \longrightarrow U \,:\, n, m \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $(\mathcal{G}, \circ)$ es un subgrupo no Abeliano del grupo $(\mathcal{H}, \circ)$ donde $\mathcal{H} = \{f : U \longrightarrow U \,:\, f \text{ es biyectiva}\}$.

    (e) Considere $U = \mathbb{R}^2$ y sean $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tales que para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

    $$f(x, y) = (-x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = (-y, x).$$

    Verifique que $f^2 = id$ y $g^4 = id$. Además muestre que f y g son biyectivas y que $f \circ g = g \circ f^{-1}$,

    $$f^p = \begin{cases} id & \text{si } p \text{ es par} \\ f & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

    Demuestre que $(\{f^p : p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es isomorfo a $(\{-1, +1\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{R}$. Además para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $g^n \circ f = f \circ g^{-n}$ y deduzca que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $g^n \circ f = f \circ g^{-n}$. Concluya que

    $$\forall n, m, p, q \in \mathbb{Z}, \quad \exists s, t \in \mathbb{Z}\text{tales que } (f^m \circ g^n) \circ (f^p \circ g^q) = f^s \circ g^t.$$

    Finalmente, sea $\mathcal{G} = \{f^m \circ g^n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \,:\, n, m \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $(\mathcal{G}, \circ)$ es un subgrupo no Abeliano del grupo $(\mathcal{H}, \circ)$ donde $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \,:\, f \text{ es biyectiva}\}$.

41. Exprese en la forma $a + ib$ los siguientes complejos

$$(1-i)^4(1+i)^4 \qquad 1 + i + \frac{i-1}{|1-i|^2 + i}.$$

42. Sea $m \in \mathbb{N}$. Escriba $\dfrac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ en la forma polar $\rho e^{i\theta}$ y pruebe que

$$6|m \Longleftrightarrow \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2.$$

43. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\rho \in \mathbb{R}$,

$$(1-\rho e^{i\pi/2})^n + (1+\rho e^{i\pi/2})^n \in \mathbb{R}.$$

44. Sea $(A, \cdot, +)$ un anillo finito (es decir, $|A| < +\infty$) sin divisores de cero.

   (a) Pruebe que $\exists\, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $\overbrace{1+\ldots+1}^{p-veces} = 0$.

   (b) Pruebe que si $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces $\overbrace{1+\ldots+1}^{a\cdot b-veces} = 0 \Longrightarrow \overbrace{1+\ldots+1}^{a-veces} = 0 \vee \overbrace{1+\ldots+1}^{b-veces} = 0.$

45. Sea $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Pruebe que

$$\alpha\beta\gamma = -c \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \quad \text{y} \quad \alpha + \beta + \gamma = -a,$$

   y use esto para encontrar las raíces del polinomio $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que tiene una raíz compleja de módulo 4.

46. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\chi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ es un carácter de $(\mathbb{Z}_n, +)$ si

   - $|\chi(k)| = 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}_n$
   - χ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_n, +)$ en $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

   Para $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ se define la función

$$\phi_l : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \phi_l(k) = exp(i\frac{2\pi lk}{n}).$$

   (a) Pruebe que ϕ_l es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$.

   (b) Use que $\underbrace{1+\ldots+1}_{n-veces} = 0$ para probar que si χ es un caracter de $(\mathbb{Z}_n, +)$, entonces $\chi \in \{\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}\}$.