Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas No 4

Algebra Matricial y Sistemas Lineales

P1.– Sea $M(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. Demuestre que $(M(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ (con la suma y multiplicación de matrices inducida por $\mathbb{Z}_3$) es un cuerpo con 9 elementos y $(M(\mathbb{Z}_3) \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo (cíclico) de orden 8 (0 es la matriz nula).

P2.– Dado el sistema lineal:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(2-\beta) & x_1 & + & (-1+\beta) & x_2 & + & 5\beta & x_3 & + & & x_4 & = & 0 \\
(-2+\beta) & x_1 & + & (2-2\beta) & x_2 & - & 5\beta & x_3 & - & & x_4 & = & 0 \\
(2-\beta) & x_1 & + & (-1+\beta) & x_2 & + & (1+4\beta) & x_3 & + & 2 & x_4 & = & 0 \\
(-2+\beta) & x_1 & + & (1-\beta) & x_2 & - & 5\beta & x_3 & + & (-1+\beta) & x_4 & = & 0
\end{array}$$

Encuentre las condiciones necesarias sobre $\beta \in \mathbb{R}$ para que el sistema:

(i) Tenga infinitas soluciones y encuentre el conjunto solución.
(ii) Tenga solución única. Encuentre esta solución.
(iii) No tenga solución.

P3.– Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de la forma

$$A = \begin{bmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{bmatrix}$$

con $B \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q\times q}(\mathbb{R})$, $n = p+q$ y $0_{p,q}$, $0_{q,p}$ son matrices nulas de dimensiones $p \times q$ y $q \times p$ respectivamente.

(i) Demostrar que

$$A^2 = \begin{bmatrix} B^2 & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C^2 \end{bmatrix}$$

(ii) Si tanto B como C son matrices de la forma

$$\begin{bmatrix}
d & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & d & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & d & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d
\end{bmatrix}$$

y $k = \max(p, q)$. Pruebe que $(A - dI)^k = 0_{n,n}$.

P4.– Considere el sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & 2 & x_2 & & & & + & b & x_4 & = & b \\
x_1 & + & (a+2) & x_2 & + & 2 & x_3 & + & b & x_4 & = & 2 \\
 & & 2a & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 2 & x_4 & = & 7 \\
-x_1 & - & 2 & x_2 & & & & & & & = & a
\end{array}$$

(i) Si $a, b \in I\!R$ y $a \neq 0$. Estudie la existencia de soluciones del sistema en función de los parámetros a y b. En caso de tener solución diga si es única.
(ii) Si $a, b \in I\!R$ y $a = 0$. Estudie bajo que condiciones el sistema tiene solución y explicite el conjunto solución.

P5.– Encuentre los valores de a y b en $I\!R$ tales que el sistema de ecuaciones tenga solución:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 4 & x_4 & = & a \\ x_1 & + & 2 & x_2 & + & & x_3 & + & 2 & x_4 & = & b \\ & & 2 & x_2 & + & 2 & x_3 & + & 2 & x_4 & = & a \\ x_1 & & & & & & & + & & x_4 & = & b \\ x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 4 & x_4 & = & b+1 \end{array}$$

P6.– Sea $\alpha \in I\!R$. Determine los valores de $a, b, c, d \in I\!R$ tales que

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & a & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Discuta la solución en función del parámetro α.

P7.– Considere

$$A = \begin{bmatrix} I & D & 0 \\ D & I & U \\ 0 & U & I \end{bmatrix}$$

una matriz cuadrada particionada en bloques, donde $D = diag(d_1, ..., d_m)$, con $d_i \neq 0$ y $d_i \neq 1, -1$. Además U es una matriz triangular superior.

(i) Pruebe que existen matrices

$$E_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C_1 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ y } E_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & C_2 & I \end{bmatrix}$$

particionadas en bloques tales que $E_2 \cdot E_1 \cdot A = \bar{A}$ con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & A_6 \end{bmatrix}$$

una matriz triangular superior.

(ii) Encuentre condiciones sobre los coeficientes de U para que $\bar{A}$ sea invertible.

P8.– Dada la matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$$

Encuentre para que valor (es) de α la matriz A es invertible y encuentre la descomposición LU de A.

P9.– Dados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(i) Encuentre la descomposición LU de A.
(ii) Resuelva el sistema $Ax = b$.

P10.– (Problema de interpolación polinomial)

(i) Sean $x_0, ..., x_n \in I\!R$, $y_0, ..., y_n \in I\!R$. Se pide determinar el polinomio de grado menor o igual a n, es decir, de la forma:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$$

tal que satisface las ecuaciones:

$$P(x_i) = y_i, \quad \forall\ i = 0, ..., n$$

(ii) Pruebe que el problema tiene única solución si $x_i \neq x_j$, $\forall\ i \neq j$.
(iii) Pruebe que el problema NO tiene solución única sí y sólo sí $x_0 = x_1 = ... = x_n$.

Indicación: matricialmente el problema se escribe

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ...... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ...... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ...... & x_2^n \\ . & . & . & ...... & . \\ . & . & . & ...... & . \\ . & . & . & ...... & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & ...... & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

P11.– Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine todos los vectores b tales que $Ax = b$ tenga solución.

P12.– Obtenga la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

En base a la descomposición anterior resuelva $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

P13.– Encuentre la descomposición LU de la matriz siguiente especificando las matrices elementales usadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la inversa de A.

P14.– Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} (1-\beta)x_1 + \beta x_2 + 2\beta x_3 + 2\beta x_4 &= 0 \\ (\beta - 1)x_1 + (2-2\beta)x_2 - 2\beta x_3 - 2\beta x_4 &= 0 \\ (1-\beta)x_1 + \beta x_2 + (2+\beta)x_3 + (1+2\beta)x_4 &= 0 \\ (\beta - 1)x_1 - \beta x_2 - 2\beta x_3 + (2-2\beta)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(i) Determine los valores de $\beta \in I\!R$ tales que: el sistema tiene solución única en $I\!R^4$, el sistema tiene infinitas soluciones en $I\!R^4$ y el sistema no tiene solución en $I\!R^4$. Encuentre las soluciones que aparecen en cada caso.
(ii) Calcule la inversa de la matriz de coeficientes del sistema cuando ésta exista.

P15.– Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ tal que $A_{i,j} = 0$ si $(i+j)$ es impar y $A_{i,j} = 1$ si $(i+j)$ es par.
Calcule la descomposición LU de A.

P16.– Se postula que el cuociente $\frac{2x^2+4x+\lambda}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$ se puede escribir de la forma reducida $\frac{2x^2+4x+\lambda}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$ donde $A, B, C, D \in I\!R$ a determinar.

(i) Probar que la solución se obtiene resolviendo un sistema lineal de incógnitas A, B, C y D.
(ii) Resolver el sistema usando el método de Gauss expresando las soluciones en función de λ.
(iii) Estudiar la solución en el caso $\lambda = 6$ e interprete el resultado.

P17.–

(a) Sea $A \in M_{m\times m}(I\!R)$ y $n \in I\!N \setminus \{0\}$ tales que $A^n = 0$ ($A \cdot ..... \cdot A$, n veces, es igual a la matriz nula de $m \times m$). Probar que $I_m - A$ es invertible con inversa $I_m + A + A^2 + ... + A^{n-1}$.

(b)
(i) Sean $B \in M_{m\times n}(I\!R)$, $x \in I\!R^n$, $y \in I\!R^m$. Probar que $< Bx, y > = < x, B^T y >$.
(ii) Sea $A = I_n + B^T B$ y $x \in I\!R^n$. Probar que $< Ax, x > = ||x||^2 + ||Bx||^2$.
(iii) Concluya que si $Ax = 0$ entonces $x = 0$.

P18.– Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2+\alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Determine los valores de los parámetros $\alpha, \beta \in I\!R$ tales que el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,

(i) no tenga solución,
(ii) tenga soluciones múltiples, y calcule el conjunto solución,
(iii) tenga solución única, y obtenga dicha solución.

P19. Considere el sistema lineal en los parámetros α, $\beta \in I\!R$, $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \alpha - \beta \\ -2 & -1 & 2\alpha - 1 & -\beta - 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta - 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha/2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 - \beta \\ 1 \\ 2\beta - 3/2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre las condiciones sobre α y β para que el sistema: (i) tenga infinitas soluciones y encuentre dichas soluciones, (ii) tenga solución única y encuentre dicha solución y (iii) para que no existan soluciones.

P20.– Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que P es invertible y calcule P^{-1}.
(ii) Probar que $A = PDP^{-1}$ y encontar A^{10}.

P21.–
(i) Se dice que una matriz cuadrada es idempotente si $A^2 = A$. Sean A y B dos matrices cuadradas idempotentes de la misma dimensión. Probar que $A + B$ es idempotente sí y sólo sí $AB = -BA$.
(iii) Considere la matriz

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \cdots & z^{n-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & \cdots & z^{2(n-1)} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & \cdots & z^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z^{n-1} & z^{2n-2} & z^{3n-3} & \cdots & z^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

donde z es un número complejo (o bien $A_{i,j} = z^{(i-1)(j-1)}$ en cada $i, j \in \{1, ..., n\}$). Demostrar que si z_0 es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1 entonces $A(z_0)$ es invertible y que se satisface la relación $A(z_0^{-1}) = nA^{-1}(z_0)$ (recuerde que si z es raíz n-ésima de la unidad $z \neq 1$ entonces $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = 0$).

Geometría en $\mathbb{R}^3$

P1.– (i) Sean $L_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ el eje de las x y $L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 0)$ y $(-1, 3, -1)$. Encuentre una tercera recta $L_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a L_1 y a L_2, y que además intersecte a estas dos rectas.

(ii) Sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación cartesiana $x + y + z = 1$, y sea P el origen $(0, 0, 0)$ en $\mathbb{R}^3$. Calcular el punto $Q \in \mathbb{R}^3$ simétrico de P con respecto a π.

P2.– Considere los planos: $\pi_1 : \quad -3x_1 - x_2 + 2x_3 = \phi_1$, π_2 : es el plano perpendicular a $(2, 1, -1)$ y contiene al punto $(0, 0, \phi_2)$, y π_3 : es el plano paralelo al vector $(1 - \phi_3, 1, (\phi_3 - 4)/2)$ y contiene al punto $(0, 0, 1)$.

Determine las condiciones que deben satisfacer ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de modo que,

(i) π_1, π_2, π_3 no se intersecten.
(ii) π_1, π_2, π_3 se intersecten en un punto.
(iii) π_1, π_2, π_3 se intersecten en una recta.

P3.– Sea π_0 el plano que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y tiene vectores directores $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 2)$.

(i) Escriba la ecuación normal del plano π_0.
(ii) Encontrar la ecuación cartesiana del plano π que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y no corta a π_0.
(iii) Calcular la proyección de P sobre π_0.
(iv) Calcular la distancia entre π y π_0.
(v) Usando Gram-Schmidt dar una base ortonormal de π_0.

P4.– Sean $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

(i) Determine la ecuación cartesiana del plano π_0, cuyos directores son d_1 y d_2, y que pasa por el origen.
(ii) Dada la recta L definida por: $x + y + z = 4$ y $2x - z = 2$, determine el vector $P_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in L$.
(iii) Encuentre el plano π_0' paralelo a π_0 y que contiene a P_0.

(iv) Calcule la distancia de π_0' al origen, medida como la norma de un vector en π_0', ortogonal a éste.

P5.– Sean los planos

$$\pi_1 : \quad 3x + 5y + z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \quad ax + 15y + 3z + d = 0$$

(i) Encuentre condiciones sobre a y d (en $I\!R$) para que los planos se corten.
(ii) Encuentre condiciones sobre a, d para que los planos se corten perpendicularmente.

P6.– Sean $p \in I\!R^3$ y $D \neq 0$ en $I\!R^3$. Se define:

$$L = \{x \in I\!R^3 \ / \ (x - p) \times D = 0\}$$

(i) Pruebe que $L = \{x \in I\!R^3 \ / \ x = P + \lambda D, \ \lambda \in I\!R\}$.
(ii) Sean $D \neq 0$, $B \neq 0$ vectores en $I\!R^3$. Qué condiciones deben satisfacer D y B para que la recta $L = \{x \in I\!R^3 \ / \ (x - p) \times D = 0\}$ y el plano $\pi = \{x \in I\!R^3 \ / \ < x, B >= 0\}$ se intersecten.

P7.– Sea L_1 la intersección en $I\!R^3$ de los planos, $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ y $x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0$, y sea L_2 la recta de vector director $(1, 1, 0)$ y que pasa por el origen. En lo que sigue lo guiaremos para obtener la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

(i) Encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) de L_1.
(ii) Encuentre un vector no nulo ortogonal a L_1 y L_2.
(iii) Tome $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$, y calcule la proyección de $P_2 - P_1$ sobre la dirección normal calculada en (ii).

Nota: el módulo de la proyección calculada en (iii) es la distancia entre las rectas.

P8.– En $I\!R^3$ considere los planos $\pi_1 : \quad x + y + z = 3$ y $\pi_2 : \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha, \beta \in I\!R$.

(i) Encuentre la recta $L = \{x \in I\!R^3 \ / \ x = P + \lambda D, \ \lambda \in I\!R\}$ intersección de π_1 y π_2.
(ii) Encuentre el plano π que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y es perpendicular a L.

P9.– En un punto $F(0, 0, 1)$ se ubica un foco luminoso que emite rayos de luz en forma radial. Los puntos $A(2, 0, 1)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(1, 1, 3)$ definen una plancha triangular opaca que impide el paso de los rayos luminosos.

(i) Determine el área de la sombra que la plancha proyecta sobre una pantalla ubicada en el plano π definido por: $x + y + z = 9$.
(ii) Como varía su respuesta si el foco se encuentra en el infinito y sus rayos luminosos inciden perpendicularmente sobre π.

P10.– Determine la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta de ecuación:

$$L : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in I\!R$$

y que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

P11.– Dados los planos $\pi_1 : x + y + z = 1$ y $\pi_2 : 3x - 4y + 2z = \lambda$.

(i) Determine el valor de λ de modo que el punto $P(1,-1,1)$ pertenezca a la recta de intersección de los planos.
(ii) Encuentre el punto Q simétrico de P con respecto al plano $\pi : x-y-z=2$ y está en la dirección de la recta definida en (i).

P12.– Sean $X_1,\ X_2,\ X_3 \subseteq I\!\!R^3$ definidos por:

$X_1 = \{(x,y,z)^T \in I\!\!R^3\ /\ (x,y,z)^T$ es combinación lineal de los vectores $(1,1,-2)^T,\ (2,-2,-7)^T,\ (0,4,3)^T\}$, $X_2 = \{(x,y,z)^T \in I\!\!R^3\ /\ 3x+y-5z=7\}$ y $X_3 = \{(x,y,z)^T \in I\!\!R^3\ /\ (x,y,z)^T = (5,6,7)^T + \alpha(1,-1,0)^T,\ \alpha \in I\!\!R\}$.

(i) Determine geométricamente que representan X_1, X_2, X_3. Además describa analíticamente las intersecciones $X_1 \cap X_2,\ X_1 \cap X_3,\ X_2 \cap X_3$.
(ii) Es posible encontrar una base de $I\!\!R^3$, $(f_1, f_2.f_3)$ talque $f_1 \in X_1,\ f_2 \in X_2,\ f_3 \in X_3$. En caso afirmativo de una tripleta.

P13.– Sean π_1 el plano de ecuación $x+y+2z=1$, π_2 el plano de ecuación $-x+y=2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y cuya dirección es $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos π_1 y π_2. Entregue un vector director de dicha recta.
(ii) Encuentre el punto P_2 de intersección de le recta L_1 y π_1.
(iii) Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.
(iv) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.

P14.– Sean

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

vectores no paralelos en $I\!\!R^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Es decir, $u \neq \lambda v$ para cada $\lambda \in I\!\!R \setminus \{0\}$. Probar que

$$\left\{ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I\!\!R^2\ /\ \widetilde{x} \perp u,\ \widetilde{x} \perp v \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$