Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas No 5, 1999

Espacios Vectoriales

1. Decidir cuál o cuáles de las estructuras siguientes son espacios vectoriales

   i) $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y la ponderación por $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(a,b) = (\alpha a, b)$

   ii) $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y la ponderación por $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha(a,b) = (\alpha a, 0)$

   iii) $\mathbb{R}^+$ con la "suma": $x \oplus y = x \cdot y$ y la ponderación $\alpha \cdot x = x^\alpha$

   iv) El conjunto de las funciones de [a,b] en $\mathbb{R}$ acotadas, con la suma y ponderación usuales

   v) El conjunto de las funciones f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(-1) = f(1)$ con la suma y ponderación usuales.

2. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define:

$$ker\ A = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0\}$$

Pruebe que $ker\ A$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

3. Sea $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Sean P_1, P_2, P_3 polinomios de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ tales que:

$$P_1(x) = 1 + 6x^2 \ ; \ P_2(x) = 4x \ ; \ P_3(x) = 1 + 3x + 5x^2$$

Demuestre que: $\forall p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de grado menor o igual a 2 está contenido en el s.e. generado por P_1, P_2 y P_3.

4. ¿Cuál o cuáles de los conjuntos siguientes es o son subespacios de los espacios vectoriales que se indican?

   i) $S = \{(x_1, ...x_n)^T \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_2 = ... = x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$

   ii) $S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 1 = x_2 + 2 = x_3 + 3\}$ de $\mathbb{R}^n$

   iii) $S = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_3 = x_5 = ... = 0\}$ de $\mathbb{R}^n$

   iv) $S = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

   v) $S = \{ \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})\}$ de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

vi) $S = \{p \in I\!P(I\!R) \;/\; 5$ es raíz de $P\}$ de $I\!P(I\!R)$

vii) $S = \{f : [a,b] \to I\!R / f$ es continua en $[a,b]\}$ del espacio de las funciones acotadas en $[a,b]$

viii) $S = \{p \in I\!P(I\!R) \;/\; p(0) = 1\}$ de $I\!P(I\!R)$.

5. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de un espacio vectorial de E sobre un cuerpo K. Probar que:

   $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de E y dé un contraejemplo para mostrar que, en general, $S_1 \cup S_2$ no es un subespacio de E.

6.

i) Demuestre que el conjunto $I\!P_n(x)$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n es un subespacio de $I\!P(x)$, indicando un subconjunto generador.

ii) Determine el subespacio de $M_{2\times 2}(I\!R)$ generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

iii) Pruebe que el conjunto de todas las funciones del tipo:

   $x \to Asen(x+\alpha)$ con $A, \alpha \in I\!R$; es un subespacio generado por las funciones seno y coseno.

7. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. En $E \times E$ se definen las siguientes operaciones:

$$(u,v) + (u',v') = (u+u', v+v')$$

$$\lambda(u,v) = (\lambda u, \lambda v)$$

a. Pruebe que $E \times E$, con las operaciones anteriores, es un espacio vectorial sobre K.

b. Considere los conjuntos:

   $\Delta = \{(u,v) \in E \times E / u = v\}$

   $\bar{\Delta} = \{(u,v) \in E \times E / u = -v\}$

   Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son subespacios vectoriales de $E \times E$ y que $\Delta \oplus \bar{\Delta} = E \times E$

c. Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son isomorfos a E

d. Si $dim\ E = n$, calcule $dim\ \Delta$, $dim\ \bar{\Delta}$ y $dim\ E \times E$

8. Sea E el espacio vectorial sobre $I\!R$ de las funciones definidas sobre $Z\!\!\!Z$ a valores reales:

$$E = \{f | f : Z\!\!\!Z \to I\!R \text{ es función } \} = \mathcal{F}(Z\!\!\!Z, I\!R)$$

   Sean $a_1, a_2 \in I\!R$ con $a_2 \neq 0$ y $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones f en E que verifican la condición:

$$\forall n \in Z\!\!\!Z, f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0.$$

   (a) Mostrar que F es un s.e.v. de E.

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que existe un único elemento $f \in F$ tal que: $f(1) = a$ y $f(2) = b$.

(c) Cual es la dimensión de F.

9. Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones de valores reales. Sea F el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que contiene sucesiones con un número finito de términos distintos de ceros

a. Demuestre que F es un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}$

b. Demuestre que el s.e.v. es de dimensión finita, es decir, que el cardinal de una de sus bases es finito. Encuentre una base y demuestre que lo es.

10. Determine el o los valores de α para que el vector $(1, 2, 3\alpha, \alpha)^T$ esté contenido en el subespacio generado por:

$$\{(1, 2, 2, 1)^T; (5, 10, 14, 3)^T; (2, 10, -2, 5)^T, (5, 4, 32, -6)^T\}$$

11. Sea $P_2(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado ≤ 2. Sean $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ y considere $P_1, P_2, P_3 \in P_2(\mathbb{R})$ tal que

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3.$$

i) Determine P_1, P_2 y P_3

ii) Mostrar que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de $P_2(\mathbb{R})$ y determinar las coordenadas de $1 + x + x^2$ en esta base.

12. Extraiga una base del conjunto de vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

13. Sea $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, el e.v. de los polinomios de grado menor o igual a 4.
Sea $G = \{(1 + x), x^2, (1 + x^3), (1 + x^2 + x^3), (x^2 + x^4), (1 + x^3 + x^4)\}$
Encuentre una base del s.e.v generado por G.

14. Sean E, F e.v. sobre un cuerpo K, con $dim\ E = n$ y $dim\ F = m$
Sea T una función, $T : E \to F$, que satisface:

(1) $T(0_E) = 0_F$

(2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in K\ :\ T(\alpha x) = \alpha T(x)$

(3) $\forall x$, y $\in E \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$

Se define $Im(E)$ por T como:

$$I_m(E) = T(E) = \{y \in F / y = T(x),\ x \in E\}$$

i) Mostrar que $T(E)$ es un s.e.v. de F

ii) Sea $n \leq m$ y supongamos además que T satisface que:

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Muestre que si $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de E, entonces:
$\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de $T(E)$, donde $v_i = T(u_i) \quad \forall i = 1, ..., n$

15. Sea $\{a_1, ..., a_n\}$ una base de un e.v. E de dimensión n sobre K. Dado $p \leq n$ se definen los vectores

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j \quad i = 1, ..., p \text{ donde los } \alpha_{ij}$$

satisfacen:

(i) $j < i \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$

(ii) $\alpha_{ii} \neq 0 \quad \forall_i = 1, ..., p$

Muestre que los vectores x_i son $\ell.i.$

16.

a) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $\mathcal{L} : V \to V$ una función lineal para la cual existen $n \in I\!N$ y $x_0 \in V$ tales que:

$$\mathcal{L}^n(x_0) = 0 \text{ y } \mathcal{L}^{n-1}(x_0) \neq 0$$

Demuestre que el conjunto $\{x_0, \mathcal{L}(x_0), ..., \mathcal{L}^{n-1}(x_0)\}$ es linealmente independiente (Nota: Los exponentes indican composición, por ejemplo: $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ o $\mathcal{L}\}$

b) Sean $S, T : I\!R^n \to I\!R$ funciones lineales. Demuestre que si

$$Ker(T) \subset Ker(S) \Rightarrow \exists \alpha \in I\!R \ \ tq\ S = \alpha T.$$

17.

i) Probar que el conjunto $\{senx, sen2x, cosx, cos2x\}$ es $\ell.i.$

ii) Probar que $\forall n \in I\!N,\ n \geq 1$, el conjunto $\{senx, sen2x, ..., sen(nx)\}$ es $\ell.i.$

18. Determine la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

i) $(-3, 1, 0)^T, (4, 6, -5)^T$ y $(-7, -5, 5)^T$ en $I\!R^3$

ii) $x^2 + 1, x^2 - 1$ y $x^2 + x + 1$ en $I\!P(I\!R)$

iii) $f(x) = 1, g(x) = sen^2(x), h(x) = cos(2x)$

iv) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $M_{2\times 2}(I\!R)$

19.

i) Sean a, b y c tres vectores. Determine si:
$\{a+b, b+c, c+a\}$ es un conjunto $\ell.i.$

ii) Determine $\alpha, \beta \in I\!R$ de modo que los vectores de $I\!R^4$:
$(1, 2, \alpha, 1), (\alpha, 1, 2, 3)$ y $(0, 1, \beta, 0)$ sean $\ell.d.$

iii) Sean $u_1, u_2, ...u_k$ vectores $\ell i.$ Pruebe que: $\forall \alpha$ escalar, los vectores:

$$u_1 + \alpha u_2, u_2, u_3, ..., u_k \text{ son } \ell.i.$$

iv) Pruebe que el conjunto de polinomios reales:

$$\{1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3), (x-1)\cdot(x-2)\ldots(x-k)\}$$

son $\ell.i.$

20. Sea V un espacio vectorial sobre $I\!R$. Considere $V \times V$ dotado de la ley de composición interna (suma):

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V \times V, (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

y la ley de composición externa con el cuerpo $\mathbb{C}$

$$\forall (\alpha + i\beta) \in \mathbb{C}, \forall (a, b) \in V \times V, (\alpha + i\beta)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a)$$

i) Asumiendo que $(V \times V, +)$ es grupo abeliano, pruebe que $V \times V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ dotado de las leyes anteriores.

ii) Muestre que $\forall (a, b) \in V \times V, (a, b) = (a, 0) + i(b, 0)$, y a partir de esto demuestre que si:
$\{v_j\}_{j=1}^n$ es una base en V, entonces $\{(v_j, 0)\}_{j=1}^n$ es una base de $V \times V$

iii) Dados dos $s.e.v.$ V_1, V_2 de V, demuestre que $V_1 \times V_2$ es $s.e.v.$ de $V \times V \Leftrightarrow V_1 = V_2$

21. Sea $c = \{(1, 1, 1, 1)^T, (1, -1, 0, 1)^T, (3, -1, 1, 3)^T\}$ y $W =< c >$

a) Encuentre una base ortonormal de W

b) Encuentre una base ortonormal de $W^\perp$

c) Encuentre la proyección ortogonal de $(2, 1, 0, 0)$ sobre $W^\perp$

22. Sea $V = \{(S_n)_{n\in I\!N} / S_{n+2} = S_{n+1} + S_n\}$ donde $(S_n)_{n\in I\!N}$ denota una sucesión real

i) Pruebe que V es $s.e.v.$ del $e.v.$ de las sucesiones reales.

ii) Encuentre una base de V (demostrando que lo es) y determine la dimensión de V

23. Determinar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0),(1,0,0,1)$ y $(0,0,1,1)$, y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$.

24. Averiguar si los polinomios $1+x^3, 1-x^3, x-x^3, x+x^3$ constituyen una base de $\mathbb{R}_4[x]=\{p(x)\in \mathbb{R}[x]/gr(p(x))<4\}$.

25.

a) Verifique que el conjunto ordenado:
$(1, x, \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$ es una base del espacio de los polinomios reales de grado menor que 4, y determinar las coordenadas del polinomio x^2 relativas a ella.

b) Verifique que:

$B_1 = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$ y

$B_2 = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$ son bases ordenadas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Si $(1,-2,1,3)$ son las coordenadas de una matriz de 2×2 relativas a la base B_1, encuentre las coordenadas de dicha matriz relativa a B_2

26. Sea E un espacio vectorial sobre K con $dim(E)=n$. Sean F, G, subespacios vectoriales de E. Sea $H=F\cap G$ subespacio vectorial de E y sean
I un suplemento de H c/r a F (i.e. $H\oplus I=F$)
J un suplemento de H c/r a G (i.e. $H\oplus J=G$)

a) Demostrar que $H+I$ y J son suplementarios en $F+G$

b) Deducir de a) que:

$$dim(F+G)=dim(F)+dim(G)-dim(F\cap G)$$

27.

i) Construir una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ a partir de la base formada por:

$$u_1=(1,0,i); u_2=(2,1,1+i); u_3=(1,1,i).$$

ii) Expresar u_1,u_2,u_3 en términos de la base ortonormal obtenida en i) para descomponer la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1+i & i \end{bmatrix}$$

en un producto $Q\cdot R$ de dos matrices de las cuales Q es unitaria $(Q\cdot Q^H=I_n)$ y R es triangular

Observación: el super índice H indica trasnpuesta conjugada.

28. Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Se sabe que $E \times F$ es un espacio vectorial con las leyes $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ y $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
    (a) Probar que $E \times \{0_F\}$ y $\{0_E\} \times F$ son subespacios suplementarios de $E \times F$.
    (b) Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de E y $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ una base de F. Determinar una base de $E \times F$.

29. Sea S el conjunto de las matrices reales de 3×3 de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

y T el de las matrices reales de 3×3 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

(i) Probar que S y T son subespacios vectoriales de $M_{3\times 3}(I\!R)$. Indicar bases y dimensión.
(ii) Verificar que $S \oplus T$ es isomorfo al subespacio de las matrices simétricas indicando una función que establezca el isomorfismo.

30. Considere los subespacios vectoriales de $I\!P_4(I\!R)$
$W_1 = \{P \in I\!P_4(I\!R)/P$ tiene a 1 como raíz $\}$ y
$W_2 = \{P \in I\!P_4(I\!R)/P$ tiene a 2 como raíz$\}$
    a) Encuentre base de W_1 y W_2 y dé su dimensión
    b) Demuestre que $W_1 + W_2 = I\!P_4(I\!R)$. ¿Es suma directa?

31.- Sea W el subespacio vectorial de $I\!R^4$ generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determine una base de W y su dimensión.

(ii) Extienda la base encontrada en (i) a una base de $I\!R^4$.

(iii) Encuentre una base ortonormal de W y de $W^{\perp}$ (el ortogonal de W).

(iv) Encuentre la descomposición de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $W + W^{\perp}$.

32. Sea $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R) \ / \ a, b \in I\!R \right\}$.

(i) Probar que U es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(I\!R)$.

(ii) Encuentre una base de U y su dimensión.

(iii) Pruebe que $V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ / \ c, d \in I\!R \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(I\!R)$ y que $M_{2\times 2}(I\!R) = U \oplus V$.

(iv) Encuentre un isomorfismo entre U y $I\!R^2$.

33. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Sean V y W subespacios vectoriales de E tales que $V \cap W = \{0\}$, y $S : V \to W$ una transformación lineal. Se define $T : V \oplus W \to W$ por $T(x) = w + S(v)$, donde $x = v + w$ con $v \in V$, $w \in W$.

(1) Probar que T es una transformación lineal.
(2) Sean $B = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B' = \{w_1, ..., w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Si A es la matriz representante de S con respecto a las bases B y B', calcular la matriz representante de T con respecto a las bases $B'' = \{v_1, ..., v_n, w_1, ...w_m\}$ y B'.
(3) Probar que $\{v_1 - S(v_1), ..., v_n - S(v_n)\}$ es una base de $Ker(T)$.
(4) Probar que T es sobreyectiva.

34. Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $P_m(X)$ de los polinomios de grado menor o igual que m con coeficientes reales $p(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_m X^m$. Se define el conjunto

$$V = \{p(X) \in P_m(X) \ : \ \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = a_{m-i}\}.$$

(i) Probar que V es un subespacio vectorial de $P_m(X)$ sobre los reales.
(ii) Encontrar una base de V y deduzca que su dimensión es $n + 1$.
(iii) Probar que $P_m(X) = V \oplus P_{n-1}(X)$.
(iv) Se define

$$V' = \{p(X) \in P_m(X) \ : \ \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = -a_{m-i}\}.$$

Probar que $P_m(X) = V \oplus V'$ (asuma que V' es un subespacio vectorial de $P_m(X)$).

Transformaciones Lineales

1. Sea $c \in I\!R$ y $P_{n,c} = \{p(x)e^{cx}/p$ es un polinomio de grado $\leq n\}$

   Definimos $D : P_{n,c} \to P_{n,c}$ como $Df = \frac{df}{dx}$ (la derivada)

a) Demuestre que D es una transformación lineal.
b) Muestre que $(D - cI)$ es una tranformación lineal nilpotente, es decir, que existe $k \in I\!N$ tal que $(D - cI)^k = 0$
   Aquí I es el operador identidad y $(D - cI)^2 = (D - cI) \text{ o } (D - cI)$.
c) Si $b \neq c$ demuestre que $(D - bI)$ es un isomorfismo. Para ello demuestre que la transformación

$$R(b) = -\frac{1}{b-c}[I + \frac{1}{b-c}(D - cI) + ... + \frac{1}{(b-c)^n}(D - cI)^n]$$

es la transformación inversa de $(D - bI)$.

2. Considere la aplicación $T : M_{2\times3}(I\!R) \to M_{2\times2}(I\!R)$ definida por:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}.$$

   (a) Pruebe que T es una aplicación lineal.
   (b) Determine bases del núcleo e imagen de T.
   (c) Determine si T es inyectiva, epiyectiva o biyectiva.

3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

   y $T : I\!R^5 \to I\!R^5$ la transformación lineal definida por $T(x) = A \cdot x$.
   (a) Encontrar una base del $Ker(T)$ y de $Im(T)$.
   (b) Estudiar la inyectividad y la sobreyectividad de T.

4. Considere la aplicación:
   $T : I\!R^4 \to I\!R^3$
   $(x, y, z, t) \to (x + y, y - z, x + z)$

i) Demuestre que T es lineal
ii) Encuentre bases para el $Ker(T)$ y para $Im(T)$.
   Determinar el $rg(T)$

5. Sea $\mathcal{L}(E_B, F_{B'})$ el espacio vectorial de las transformaciones lineales de E en F, donde E y F son $e.v.$ sobre el cuerpo K de dimensión finita n y m respectivamente, y donde
   $B = \{u_1, ..., u_n\}$
   $B' = \{v_1, ..., v_m\}$ son bases de E y F

   Demuestre que la familia

$$S = \{T_{ij}\}_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{L}(E_B, F_{B'})$$

Definida por:

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ v_i \text{ si } j = k \end{cases}$$

es una base de $\mathcal{L}(E_B, F_{B'})$

6. Sea $T : M_{3,3}(I\!R) \to I\!R$, la función que a cada matriz
   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le asocia $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

a) Pruebe que T es lineal y calcule las dimensiones del conjunto imagen de T $Im(T)$ y del nucleo de T $Ker(T)$.
b) Encuentre bases de $Im(T)$ y $Ker(T)$
   ¿Es T inyectiva?, ¿es epiyectiva?. Justifique.

7. Sea U un espacio vectorial de dimensión finita y sean $T : U \to U$ y $S : U \to U$ transformaciones lineales tales que $S \circ T = T \circ S$ y $Ker(T) \cap Ker(S) = \{0\}$.
   (a) Demuestre que $S(Ker(T)) \subset Ker(T)$ y $T(Ker(S)) \subset Ker(S)$.
   (b) Pruebe que la transformación

$$\begin{aligned} \varphi : Ker(T) \oplus Ker(S) &\to Ker(T) \oplus Ker(S) \\ x &\sim \varphi(x) = S(x) + T(x) \end{aligned}$$

   está bien definida y es un isomorfismo.

8. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, donde V es un e.v. de dimensión finita y T satisface $T^2 = id$.
   (a) Probar que T es biyectiva
   (b) Probar que $V = Ker(T + id) \oplus Ker(T - id)$.

9. Sea T una transformación lineal del espacio $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ cuya matriz representante con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Determinar la matriz de T c/r a la base $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ y las bases de $Ker\ T$ e ImT. ¿Cual es el rango de T?

ii) Determinar una base ortonormal de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ respecto a la cual la matriz de T sea diagonal y deducir que $T^n = 2^{n-1}T$.

10. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

i) Encuentre todas las soluciones de $Ax = b$.

ii) Dé bases para $KerA, ImA$ y sus respectivas dimensiones.

b) Sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Considere $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal t.q. $KerL = S$ y $L\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dado $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquier de $\mathbb{R}^3$, encontrar $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y la matriz de L con respecto a la base canónica.

11. Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal y dim $V < \infty$. Demuestre que

$$V = Ker(T) \oplus Im(T) \Leftrightarrow Ker(T^2) = Ker(T).$$

12. a) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $L : V \to V$ una función lineal para la cual existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in V$ tales que $L^n(x_0) = 0$ y $L^{n-1}(x_0) \neq 0$. Demuestre que el conjunto $\{x_0, L(x_0), ..., L^{n-1}(x_0)\}$ es linealmente independiente (Nota: Los exponentes indican composición, por ejemplo $L^2 = L \circ L$.)

b) Sean $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones lineales. Demuestre que si $Ker(T) \subset Ker(S)$ entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $S = \alpha T$.

13. Sea E $e.v$ de dimensión finita: $T : E \to E$ lineal demuestre que:

(a) Existe $k \in I\!N$ tal que
$N(T) \subset N(T^2) \subset ... \subset N(T^k) = N(T^{k+1}) = N(T^{k+2}) = ...$

(b) Para el mismo k anterior
$Im(T) \supset Im(T^2) \supset ... \supset Im(T^k) = Im(T^{k+1}) = ...$

(c) Concluya que para el mismo k se cumple

$$N(T^k) \oplus Im(T^k) = E$$

14. Sea E un espacio vectorial sobre K con $dimE = m + n$. Sea $T : E \to E$ una transformación lineal. Demuestre que: existe una base B de E tal que $M_{B,B}(T)$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

con $A \in M_{mm}(K)$, $C \in M_{mn}(K)$, $D \in M_{nn}(K)$, 0 la matriz nula en $M_{n,m}(K)$, si y sólo si, existen subespacios V y W de E, con $dim\ V = m, dim\ W = n, E = V \oplus W$ y $T(V) \subseteq V$

15. Sea $T : E \to E$ lineal, de dimensión finita. Pruebe que

$$E = ker\ (T)\ \oplus\ Im(T) \Rightarrow\ ker(T^2) = ker\ (T)$$

16. Sea U un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{L}(U)$ el espacio de las funciones lineales de U en U. Dado $g \in \mathcal{L}(U)$ se define la función

$$T : L(U) \to L(U) \text{ como } T(f) = g \circ f$$

1. Muestre que la dimensión de $\mathcal{L}(u) = n^2$
2. Pruebe que T es lineal
3. Muestre que $ker\ (T) = \{f \in \mathcal{L}(U) : Im(f) \subseteq Ker(g)\}$. Concluya que si g es un isomorfismo entonces T también lo es.
4. Encuentre el conjunto $Im(T)$ y calcule su demensión.

17. Considere la transformación $tr : M_{n,n}(K) \to K$ definida por

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1. Pruebe que tr es lineal
2. Determine $ker\ (tr)$ e $Im\ (tr)$

3. Encuentre la matriz representante de tr con respecto a las bases canónicas.

18. Sea $T : \mathcal{P}_4(I\!R) \to \mathcal{P}_4(I\!R)$, $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \to T(P) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2$

a) Verifique que T es lineal

b) Dadas las bases
$B_1 = \{1 - x + x^2 - x^3 + x^4, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4, x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4, x^3 - \frac{1}{2}x^4, x^4\}$
$B_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

Encuentre la matriz representante de T con respecto a las bases B_1 y B_2. Denote por A a la matriz, es decir, $A = [T]_{B_1B_2}$

c) Sea $p \in P_4(I\!R)$ tq $[P]_{B_1} = (1, 2, 0, -1, 1)^T$
Encuentre $T(p)$

d) Encuentre bases de $Ker(A), Im(A)$

e) Encuentre bases de $Ker(T), Im(T)$

19. Considere la aplicación lineal $f : I\!R^4 \to I\!R^4$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3; x_1; x_1; 2x_1)$.

i) Utilizar una matriz representante de f para determinar nucleo e imagen de f y decidir si f es sobreyectiva o biyectiva.

ii) Obtener una expresión para f^n.

20. Sea $\mathcal{F}(I\!R, I\!R)$ el conjunto. de funciones de $I\!R$ en $I\!R$. Considere $B \subseteq \mathcal{F}(I\!R, I\!R)$ dado por $B = \{e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x, x^4e^x\}$, y sea S el subespacio de $\mathcal{F}(I\!R, I\!R)$ generado por B, i.e. $S = \langle B \rangle$. Sea $D : S \to S$ la aplicación lineal dada por $Df = \frac{df}{dx}$ (la derivada de f).

i) Encuentre la matriz M representante de D con respecto a la base B.

ii) Calcule M^{-1} donde M es la matriz de la parte i).

iii) Utilice ii) para determinar la función $f \in S$ que satisface $\frac{\partial f}{dx} = \alpha^4 e^x$.

21. Sea $T : I\!R^5 \to I\!R^3$ definida por:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre bases de $N(T), Im(T), [N(T)]^1$

b) Dadas las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Encuentre las matrices de pasaje que permitan calcular la matriz representante de T con respecto a las bases B, B', y calcule dicha matriz representante usando las matrices de pasaje encontradas.

22. Considere el espacio vectorial $U =< 1, x, x^2 >$ y la transformación $T : U \to U$ que a un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ le asocia

$$T(p)(x) = a_0 + a_1 + a_2 + (a_0 + a_1 - a_2)x + (a_0 - a_1 + a_2)x^2$$

1. Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica $B_U = \{1, x, x^2\}$ en U
2. Detemine la matriz de pasaje de la base B_U a la base $B'_U = \{x(x-1), x, x(x+1), (1-x)\}$
3. Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base B'_U

23. Considere la transformación lineal $T : I\!R^4 \to I\!R^4$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

i) Encuentre bases B de $ker\ (T)$ y B' de $Im(T)$

ii) Encuentre una base ortonormal B'' del núcleo de T y la matriz de pasaje de B a B''

24. Considere la matriz de $2 \times 3 : A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la transformación lineal:

$$T : M_{32}(I\!R) \to M_{22}(I\!R)$$
$$x \to Ax$$

i) Determine la matriz respresentante de T con respecto a las bases canónicas del espacio de partida.

ii) Calcule el rango de la transformación lineal T.

iii) Sea B la base canónica de $M_{3,2}(I\!R)$ y la base

$$B' \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ de } M_{22}(\mathbb{R})$$

Calcule la matriz representante $M_{BB'}(T)$.

25. Sea $P_3(\mathbb{R})$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Se define la transformación $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ por:
$T(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)X + (2a_2 + a_3)X^2 + 2a_3X^3$.

(i) Probar que T es una transformación lineal.

(ii) Probar que T es una transformación biyectiva.

(iii) Si id es la transformación identidad del espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})$ pruebe que $T - 2id$, $(T - 2id)^2$, $(T - 2id)^3$ y $T - id$ son transformaciones lineales.

(iv) Encontrar bases y dimensión de $Ker(T - 2id)$, $Ker(T - 2id)^2$ y $Ker(T - 2id)^3$.

(v) Probar que $P_3(\mathbb{R}) = Ker(T - 2id)^3 \oplus Ker(T - id)$.

26. Sea $T : P_4(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la tranformación definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 & a_3 + a_4 \end{bmatrix}$$

(a) Probar que T es lineal.

(b) Encontrar $Ker(T)$ e $Im(T)$ y dar una base y las dimensiones en cada caso.

(c) Sean $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y $\bar{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Calcular la matriz representante de T con respecto a B y $\bar{B}$.

(d) Sean $C = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3 + x^4\}$ y $\bar{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ bases de $P_4(\mathbb{R})$ y $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ respectivamente. Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases C y $\bar{C}$ usando matrices de pasaje (las que sirven para pasar coordenadas de B a C y de $\bar{B}$ a $\bar{C}$ respectivamente).