Escuela de Ingeniería Universidad de Chile

ALGEBRA MA–11A

Guía de Problemas No 6, 1999

VALORES Y VECTORES PROPIOS

P1. Determinar los valores y los vectores propios correspondientes a las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Indicar además en cada caso si la matriz A es diagonalizable y en caso afirmativo determinar la matriz invertible P y la matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

P2. Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$, se define $t_r A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ii}$.

a) Probar que $\forall C, D \in M_{n\times n}(I\!R),\ t_r(CD) = t_r(DC)$

b) Si A es simétrica y $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A entonces: $t_r A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c) Para $A, B \in M_{n\times n}(I\!R)$ se define $[A, B] = t_r(A^t B)$. Probar que:

i) $\forall A \in M_{n\times n}(I\!R),\ [A, A] \geq 0$ y que si $[A, A] = 0 \Rightarrow A = 0$.

ii) $\forall A, B, C \in M_{n\times n}(I\!R), \lambda \in I\!R,\ [\lambda A + B, C] = \lambda[A, C] + [B, C]$.

iii) $\forall A, B \in M_{n\times n}(I\!R),\ [A, B] = [B, A]$.

P3. a) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular los valores propios y dar una base ortonormal de vectores propios.

b) Deducir que B es invertible y usando la diagonalización calcule la inversa.

P4.

(i) Determine una base ortonormal de vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(ii) Estudiar el comportamiento de $A^n, n \in \mathbb{N}$ cuando $n \to \infty$.

P5.

(a) Demuestre que si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $P(A\cdot B) = P(B\cdot A)$ si A es invertible, y donde $P(A)$ denota "el polinomio característico de A"

(b) Demuestre que si A es definida positiva (no necesariamente simétrica), entonces $A_{ii} > 0 \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}$

(c) Suponga que A es nilpotente de orden 2 ($i.e. A^2 = A$). Muestre que sus valores propios son ceros y/o unos.

P6. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Obtenga su diagonalización.
(b) Dar una expresión sencilla para $A^n, n \in \mathbb{N}$
(c) Calcular la inversa de A, usando (a).

P7. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, una matriz antisimétrica, $i.e.$ $A^T = -A$. Demuestre que si n es impar entonces det $(A) = 0$.

P8.

(i) Probar que:

$$A\cdot B = B\cdot A = 0 \Rightarrow [det(A+B)]^k = det(A^k + B^k), k \in \mathbb{Z}^+$$

(ii) Determine los $a \neq 1$ para los cuales el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & ax_4 & = 0 \\ ax_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & ax_4 & = 0 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & ax_4 & = 0 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = 0 \end{array}$$

tenga soluciones no triviales.

P9.

$$det \begin{bmatrix} w & -1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & w & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & w & -1 & & & \\ : & & & & & & \\ : & & & & 0 & w & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i+1)w^i$$

P10. Considere las siguientes matrices reales,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcule los valores y vectores propios de las matrices A, B y C. Diga cuales de ellas son diagonalizables.
(ii) Determine cuales de ellas son similares entre sí.

P11. (i) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ (matriz de n filas y n columnas con coeficientes reales). Si $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_sx^s$ es un polinomio de coeficientes reales, se define $q(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + ... + a_sA^s$. Probar que si A es diagonalizable y $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A entonces $p(A) = 0$ (la matriz nula de dimensión $n \times n$).

(ii) Si $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in I\!R$ y $n \geq 2$, probar por inducción que el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a: $(-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \; \lambda^k + \lambda^n \right)$.

P12. Demostrar por inducción que:

$$det \begin{pmatrix} b_1 + a_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 + a_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n + a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} (b_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_i)$$

P13. a) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ que satisface: $detA = 1$ y $A^{-1} = A^t$. Probar que:

i) Los valores propios de A tienen módulo 1.
ii) Los vectores propios de A asociados a valores propios diferentes son ortogonales.
iii) Si $A = T$, triangular superior, entonces A es diagonal.
iv) Existe U matriz con $detU = 1$ y $U^{-1} = U^t$ tal que $U^tAU = D$, diagonal.

b) Si $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ y $A^{-1} = A^t$ con n impar. Pruebe que A tiene al menos un valor propio igual a 1 o -1.

c) Se sabe que una rotación en $I\!R^3$ es una transformación de determinante igual a 1. Deducir que existe una base ortonormal en $I\!R^3$ tal que la matriz de una rotación sea de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

P14. i) Se dice que una matriz $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ es antisimétrica ssi $A = -A^t$. Si n es impar y A es antisimétrica, calcular $detA$.

ii) Demuestre que $det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} =$
$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

P15. i) Sea $U \in M_{n\times n}(I\!R)$ tal que $U^t = U^{-1}$. Pruebe que $\forall x \in I\!R^n : \|Ux\| = \|x\|$.

ii) Sea ahora $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ simétrica. Sea M el valor propio más grande de A y v un vector propio cualquiera asociado a M. Pruebe que $\forall x \in I\!R^n : x^tAx \leq M \cdot \|x\|^2$. Demuestre además que la igualdad se alcanza para $x = v$.

iii) Sea $C \in M_{n\times n}(I\!R)$ invertible y sea $B = C^tC$. Consideremos $A \in M_{n\times n}(I\!R)$. Pruebe que:

$$det[(C^{-1})^tAC^{-1} - \lambda I] = \frac{1}{detB} \cdot det[A - \lambda B].$$

Obs.: De lo anterior tenemos que los valores propios de $(C^{-1})^tAC^{-1}$ son las raices de la ecuación $det(A - \lambda B) = 0$.

iv) Dada $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ simétrica concluya que $\forall x \in I\!R^n,\ x^tAx \leq R \cdot x^tx$, donde R es la mayor raíz de la ecuación $det(A - \lambda B) = 0$.

P16. a) Determine el o los valores de α para que el vector $(1, 2, 3\alpha, \alpha)$ esté contenido en el subespacio generado por los vectores:

$$\{(1, 2, 2, 1); (5, 10, 14, 3); (2, 10, -2, 5); (5, 4, 32, -6)\}.$$

b) Sean $A, B \in M_{n\times n}(I\!R)$. Dado $k = 1, ..., n$ denotamos A_{k*} a la matriz A cambiándole la fila k por la fila k de B. Denotamos A_{*k} a la matriz A cambiándole la columna k por la columna k de B. Demuestre:

$$\sum_{k=1}^{n} det(A_{k*}) = \sum_{k=1}^{n} det(A_{*k}).$$

Indicación: Recuerde que el determinante de una matriz puede desarrollarse por cualquier fila o columna.

P17. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 3 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in I\!R$.
Determine los valores de a, b, c para los cuales resulta que A es diagonalizable y para dichos valores dé una base de vectores propios de A.

P18. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Determine si son o no diagonizables. En caso de ser diagonizable dé una base de $I\!R^3$ tal que la matriz representante (de la transformación lineal representada por la matriz dada) sea diagonal.

P19. Sea $T : I\!R^4 \to I\!R^4$ la transformación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Encuentre la matriz A que representa a T con respecto a las bases canónicas.
ii) Sabiendo que $\lambda = 1$ es un valor propio de A, determine si A es diagonalizable.

P20. 'Cuál(es) de las siguientes matrices es(son) diagonalizable(s)?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Para alguna matriz diagonalizable de las anteriores, encuentre, la transformación de similitud que la diagoniza. Es decir, dé la descomposición PDP^{-1}.

P21. (a) Considere la matriz $A \in M_{3\times 3}(I\!R)$ siguiente,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Calcular los valores propios de A.

(ii) De una base ortonormal de vectores propios de A.

(iii) Encontrar una matriz $P \in M_{3\times 3}(I\!R)$ y $D \in M_{3\times 3}(I\!R)$, D diagonal, tal que $A = PDP^T$.

(iv) Es A una matriz invertible, justifique su respuesta.

P22. Sea $P_2(I\!R)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $MS_{2\times 2}(I\!R)$ el espacio vectorial de las matrices simétricas con coeficientes reales de 2×2. Se define la transformación lineal $T : MS_{2\times 2}(I\!R) \to P_2(I\!R)$ por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = c + (b+a)x + 2ax^2.$$

Considere además las bases $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$.

(i) Calcular la matriz A, representante de T con respecto a estas bases (β y β').

(ii) Encuentre la transformación lineal $S : MS_{2\times 2}(I\!R) \to P_2(I\!R)$ cuya matriz representante relativa a las bases β y β' es A^T.

P23. (a) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ diagonalizable y $k \leq n$. Se conoce la factorización de A siguiente:

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

donde $P \in M_{n\times n}(I\!R)$ y $\lambda_1 \neq 0, ..., \lambda_k \neq 0$. Si definimos

$$A^+ = P \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\lambda_k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

probar que $A^+ \cdot A = A \cdot A^+$ y que $A^+ \cdot A = P \cdot \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$. Cuales son los valores propios de $A \cdot A^+$.

(b) Considere la matriz $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ definida por

$$A_n = \begin{bmatrix} w & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & w & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & w & -1 \\ w & \cdot & \cdot & \cdot & w & w \end{bmatrix},$$

donde $n \geq 2$ y $w \in I\!R$. Denotemos por $V_n = det(A_n)$. Probar por inducción que $V_n = \sum_{k=1}^{n} w^k$. (Indicación: pruebe que $V_n = V_{n-1} + w^n$).

P24. Se quiere resolver la siguiente recurrencia de números reales: $u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1$ y $\forall\ n \geq 0$,

$$u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}.$$

Para ello definimos $x^{(n)} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix}$, $n \geq 0$.

(1) Calcule $A \in M_{3\times 3}(I\!R)$ tal que

$$\forall\ n \geq 0, \quad x^{(n+1)} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} = Ax^{(n)}$$

y demuestre que $x^{(n+1)} = A^{n+1}x^{(0)}$.

(2) Usando la expresión anterior calcule u_n para $n \geq 3$.

P25. a) Considere la cónica de ecuación

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy + 4x + 4y = 4$$

Efectúe un cambio de coordenadas de modo que la ecuación resultante no contenga términos lineales ni productos cruzados (del tipo $x'y'$). Escriba la ecuación resultante. Identifique la cónica.

(b) Considere la matriz $H = I_n - 2uu^T$, donde $u \in I\!R^n \setminus \{0\}$ (vector columna) satisface $u^T u = 1$.

(b.1) Pruebe que $H = H^{-1}$ y $H = H^T$.

(b.2) Pruebe que u es un vector propio de H y que si $v \in I\!R^n \setminus \{0\}$ es ortogonal a u, es decir $u^T v = 0$, entonces v es vector propio de H.

(b.3) Calcule los valores propios de H y dé su multiplicidad. Justifique.

(b.4) Determine si H es definida positiva, justifique.

P26.–

(a) Sean $A, B \in M_{n\times n}(I\!R)$ con A invertible. Pruebe que $det(AB - \lambda I_n) = det(BA - \lambda I_n)$ para todo $\lambda \in I\!R$.

(b) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ con $a \in I\!R$. Determine los valores de $a \in I\!R$ para los cuales A es diagonalizable y aquellos para los cuales no lo es.

(c) Sean $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la proyección ortogonal de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el espacio vectorial generado por u_1 y u_2.

FORMAS CUADRATICAS

P1. (a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(i) Verifique si A es definida positiva.

(ii) Dé la ecuación del elipsoide asociado.

(iii) Encuentre la forma canónica de la forma cuadrática asociada.

P2. Descomponer la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en producto LDL^t.

P3. a) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ simétrica, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ sus valores propios ordenados de menor a mayor y $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sus respectivos vectores propios formando una base ortonormal (¿Existe siempre tal base?). Probar que:

$$\forall x \neq 0, \qquad \bullet\ \lambda_1 \leq \frac{x^t A x}{x^t x} \text{ y en general}$$

$$\bullet\ \lambda_k \leq \frac{x^t A x}{x^t x} \forall x \in \{u_1, u_2, ..., u_{k-1}\}^\perp$$

b) Sea A cualquier matriz real de dimensión $n \times n$, probar que $A^t A$ es semidefinida positiva, que $x^t A^t A x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$, y deducir que rango $(A^t A)$ = rango (A).

P4. Sea A una matriz en $M_{n\times n}(I\!R)$, simétrica y definida positiva y $F : I\!R^n \to I\!R$ la función $F(x) = x^tAx + 2b^tx + \alpha$, donde $b \in I\!R^n$ y $\alpha \in I\!R$.

i) Probar que $Ax_0 + b = 0 \Rightarrow F(x) - F(x_0) = (x - x_0)^tA(x - x_0)$ y deducir que x_0 es

ii) Utilizar i) para determinar un punto donde alcanza un mínimo la función.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3 - 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3$$

P5. Reducir las formas cuadráticas siguientes a la forma diagonal:

i) $4x^2 + 24xy + 11y^2$ ii) $17x^2 + 12xy + 8y^2$ iii) $-x^2 - y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 2yz$ iv) $x^2 + y^2 + 9z^2 + 10xy - 6xz - 6yz$.

P6. i) Determinar de dos maneras distintas todos los valores de $\alpha \in I\!R$ para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \text{ es definida positiva.}$$

ii) Tomar $\alpha = 1/2$ y escribir la forma cuadrática x^tAx como suma de cuadrados.

iii) Reconocer la cónica de ecuación $x^2 + y^2 + xy + yz = 1$.

P7. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

i) Probar que A es definida positiva

ii) Expresar la forma cuadrática x^tAx en suma de cuadrados.

P8. Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ invertible

i) Demuestre que A^tA es definida positiva y que existe $P \in M_{n\times n}(I\!R)$ invert

ii) Demuestre que existe U ortogonal (es decir $U^t = U^{-1}$) tal que $A = PU$ donde P satisface $P^2 = A^tA$.

P9. a) Sea $A \in M_{n\times m}(I\!R)$ con $m < n$ y rango $A = m$.

i) Probar que A^tA es definida positiva y concluya que A^tA es invertible.

ii) Si definimos $P = A(A^tA)^{-1}A^t$, pruebe que P es una proyección, es decir $P^2 = P$ y $P^t = P$.

b) Probar que

i) $PA = A$ y concluir que $\forall j = 1, ..., m \;\; PA_{\bullet j} = A_{\bullet j}$ donde $A_{\bullet 1}, ..., A_{\bullet m}$ son las columnas de A.

ii) Si $x \in I\!R^n$ es ortogonal a las columnas de A, es decir, $\forall j = 1, ..., m \;\; \langle x, A_{\bullet j}\rangle = 0 \Rightarrow Px = 0$.

iii) Sea $x \in I\!R^n$ entonces $x = y + z$ con $y \in ImA = \langle\{A_{\bullet 1}, ..., A_{\bullet m}\}\rangle$ $z \in (ImA)^\perp = \{w \in I\!R^n / \forall j = 1, ..., n \;\; \langle w, A_{\bullet j}\rangle = 0\}$. Pruebe que $Px = y$, y que $ImP = ImA$.

P10. a) Estudie y dibuje las cónicas siguientes:

i) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 6x + 10y - 3 = 0$.

ii) $2x^2 + 4y^2 - 2xy + 7y = 8$.

b) Dar la descomposición QR de

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & -2/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

c) Sea A invertible y $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Pruebe que el polinomio caracterš tico de A^{-1} es $q(\lambda) = det(A^{-1} - \lambda I) = (-\lambda)^n \frac{1}{|A|} P(\frac{1}{\lambda})$.

P11. Sea la siguiente forma cuadrática,

$$Q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^t\ H\ x \text{ con } H \text{ hermítica } (H = \overline{H^t}) \text{ y}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ x, y, z, \in \mathbb{C}$$

$$\text{Donde } \ Q(x) = 3|x|^2 + 3|y|^2 + 2|z|^2 + 2Re\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}} z\bar{x}\right) + 2Re(iz\bar{y})$$

(a) Calcule H

(b) Reduzca H a la forma $H = PDP^t$, donde P es hermítica y D diagonal.

P12. Encontrar la forma cuadrática asociada a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en la base de vectores propios}$$

P13. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Probar que A es semi definida positiva

(ii) Mostrar que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2\sqrt{2} + x_2x_3\sqrt{2} - x_3 + 1 = 0$ es la ecuación de un paraboloide elíptico. Determinar además la dirección de su eje de simetría.

(iii) Expresar la forma cuadrática $x^T Ax$ en suma de cuadrados de polinomios de 1^{er} grado, donde $x^T Ax$ tome su valor mínimo.

P14. Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ una matriz simétrica e invertible. Denotemos por $q : I\!R^n \to I\!R$ a la forma cuadrática asociada a A:

$$q(x) = < Ax, x > = x^t Ax$$

Se define el siguiente subconjunto de $M_{n\times n}(I\!R)$:

$$J_q = \{B \in M_{n\times n}(I\!R) / \forall x \in I\!R^n \ q \cdot (Bx) = q(x)\}$$

(i) Demuestre que $J_q \neq \phi$ y que J_q es cerrado para el producto de matrices, ésto es: $B_1, B_2 \in J_q \Rightarrow B_1 \cdot B_2 \in J_q$

(ii) Muestre que si $B \in J_q$, entonces B es una matriz invertible

Indicación: Pruebe que si $B \in J_q$ entonces:

$$\forall x \in I\!R^n \ < \ B^t ABx, x \ > = < Ax, x \ >$$

(iii) Muestre que si $B \in J_q$, entonces $B^{-1} \in J_q$. Concluya que J_q dotado de el producto de matrices tiene estructura de grupo.

P15.

(a) Considere la cónica,

$$-3y^2 + 4xy - \frac{12}{\sqrt{5}}x + \frac{14}{\sqrt{5}}y = 7$$

(a.1) Identifique la cónica antes descrita.

(a.2) Es la matriz de la forma cuadrática asociada a la cónica anterior definida positiva ?, argumente.

(b) Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ una matriz simétrica cuyos valores propios son $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 1$ y $\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$ con $0 < k < n$, y su descomposición es $A = PDP^T$ con $P \in M_{n\times n}(I\!R)$ matriz ortogonal y D la matriz diagonal de valores propios.

(b.1) Sea $z = P^T x$ y $x \in I\!R^n$, probar que $||Ax||^2 = ||Dz||^2$ y que $||x||^2 = ||z||^2$. Concluir que para todo $x \in I\!R^n$, $||Ax||^2 \leq ||x||^2$.

(b.2) Probar que existe $x_0 \in I\!R^n \setminus \{0\}$ tal que $||Ax_0||^2 = ||x_0||^2$.