MA-11A Álgebra **26 de Abril, 2001**

Pauta Control 1

PROBLEMA 1:

(i).- Veremos dos formas de hacer esta parte.

- **Primera Forma**: Usando teoremas lógicos (tautologías). Tenemos que

$$\begin{aligned}
[(p \Longrightarrow q) \wedge (\overline{s} \Longrightarrow \overline{r})] \Longrightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \quad &\text{ssi} \quad [(\overline{p} \vee q) \wedge (s \vee \overline{r})] \Longrightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
&\text{ssi} \quad (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{s} \wedge r) \vee \overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s) \\
&\text{ssi} \quad [(p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p}] \vee [(\overline{s} \wedge r) \vee \overline{r}] \vee (q \wedge s) \\
&\text{ssi} \quad \overline{q} \vee \overline{p} \vee \overline{s} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s) \\
&\text{ssi} \quad \overline{p} \vee \overline{r} \vee [\overline{(q \wedge s)} \vee (q \wedge s)] \\
&\text{ssi} \quad \overline{p} \vee \overline{r} \vee T \\
&\text{ssi} \quad T\,.
\end{aligned}$$

- **Segunda Forma**: Por casos. Asumimos que $[(p \Longrightarrow q) \wedge (\overline{s} \Longrightarrow \overline{r})] \Longrightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$ es falsa. Entonces, por definición de la implicancia, $(p \Longrightarrow q) \wedge (\overline{s} \Longrightarrow \overline{r})$ es verdadera y $\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)$ es falsa. Luego, por un lado $p \Longrightarrow q$ y $\overline{s} \Longrightarrow \overline{r}$ son verdaderas, y por otro $\overline{p}$ y $\overline{r}$ y $q \wedge s$ son falsas. Sigue que p, q, r y s son verdaderas. Pero ésto implica que $q \wedge s$ es verdadera contradiciendo nuestra anterior conclusión que era falsa. Nuestro supuesto inicial debe estar malo y por lo tanto
$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (\overline{s} \Longrightarrow \overline{r})] \Longrightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]\ ,$$
es tautología.

(ii.1).- La forma más sencilla de resolver este problema es mostrando, ya sea a través de tablas de verdad o usando teoremas lógicos (tautologías), que

$$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \Longleftrightarrow q] \Longleftrightarrow (q \Longrightarrow p)\,.$$

Por propiedades de la implicancia, en particular que $p \Longrightarrow q$, $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$ y la transitividad de la implicancia, sigue que $\mathcal{R}$ es relación de orden.

En lo que sigue veremos una forma alternativa, pero más canónica, de abordar el problema.

Debemos probar que $\mathcal{R}$ es refleja, anti–simétrica y transitiva.

- **Reflexividad**: Hay que establecer que para todo $p \in \mathcal{P}$ se tiene que $p\mathcal{R}p$. En efecto, por absorbencia de $\wedge$, tenemos que $p \wedge p \Longleftrightarrow p$, i.e., $p\mathcal{R}p$.

- **Anti–simetría**: Hay que establecer que para todo $p, q \in \mathcal{P}$ si $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}p$, entonces $p = q$. En efecto,
$$p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p \Longleftrightarrow [(p \wedge q \Longleftrightarrow q) \wedge (q \wedge p \Longleftrightarrow p)] \ .$$
Por conmutatividad del $\wedge$, sigue que $q \Longleftrightarrow p \wedge q \Longleftrightarrow p$. Luego, por la definición de igualdad de proposiciones dada en el enunciado, se concluye que $p = q$.

  Nota: También, podría haberse establecido la anti–simetría probando que
$$[(p \wedge q \Longleftrightarrow q) \wedge (q \wedge p \Longleftrightarrow p)] \Longrightarrow [p \Longleftrightarrow q] \, .$$
La validez de esta última proposición puede comprobarse ya sea con tablas de verdad o usando teoremas lógicos (tautologías).

- **Transitividad**: Hay que mostrar que para todo $p, q, r \in \mathcal{P}$ si $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}r$, entonces $p\mathcal{R}r$, i.e., que
$$[(p \wedge q) \Longleftrightarrow q] \wedge [(q \wedge r) \Longleftrightarrow r] \Longrightarrow [(p \wedge r) \Longleftrightarrow r] \, .$$
Supongamos que éste no fuera el caso. Entonces $(p \wedge q) \Longleftrightarrow q$ y $(q \wedge r) \Longleftrightarrow r$ serían verdaderos y $(p \wedge r) \Longleftrightarrow r$ falsa. De la última afirmación, se deriva que r debe ser verdadera y p falsa. Luego, como $(p \wedge q) \Longleftrightarrow q$ es verdadera, tenemos que también q debe ser falsa. Pero entonces, $(q \wedge r) \Longleftrightarrow r$ no puede ser verdadera, contradicción. Nuestro supuesto inicial debe estar mal, i.e., se tiene que
$$[(p \wedge q) \Longleftrightarrow q] \wedge [(q \wedge r) \Longleftrightarrow r] \Longrightarrow [(p \wedge r) \Longleftrightarrow r] \, .$$
Nota: Ya sea con tablas de verdad o usando teoremas lógicos (tautologías), también podría haberse establecido la transitividad probando que
$$[(p \wedge q \Longleftrightarrow q) \wedge (q \wedge r \Longleftrightarrow r)] \Longrightarrow [p \wedge r \Longleftrightarrow r] \ .$$

(ii.2).- Por (ii.1) sabemos que $\mathcal{R}$ es relación de orden. Luego, para probar que es relación de orden total, basta mostrar que para cualquier $p, q \in \mathcal{P}$ se tiene que $p\mathcal{R}q$ o $q\mathcal{R}p$, o lo que es equivalente, que $(p \wedge q \Longleftrightarrow q) \vee (q \wedge p \Longleftrightarrow p)$ es una tautología.

Veremos dos formas de probar esto último.

- **Primera Forma**: Por tablas de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Longleftrightarrow q$	$q \wedge p \Longleftrightarrow p$	%
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V

- **Segunda Forma**: Usando teoremas lógicos (tautologías). Para ello, observemos que
$$\begin{aligned}(a \wedge b \Longleftrightarrow b) &\Longleftrightarrow [(a \wedge b \Longrightarrow b) \wedge (b \Longrightarrow a \wedge b)] \\ &\Longleftrightarrow [(\overline{a} \vee \overline{b} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee (a \wedge b))] \\ &\Longleftrightarrow (\overline{b} \vee a) \wedge (\overline{b} \vee b) \\ &\Longleftrightarrow \overline{b} \vee a \, .\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}(p\wedge q \iff q)\vee(q\wedge p\iff p) \quad &\text{ssi} \quad (\overline{q}\vee p)\vee(\overline{p}\vee q)\\ &\text{ssi} \quad (p\vee\overline{p})\vee(q\vee\overline{q})\\ &\text{ssi} \quad T\,.\end{aligned}$$

- **Tercera Forma**: Por casos. Suponemos que $(p\wedge q \iff q)\vee(q\wedge p\iff p)$ es falsa. Sigue que, $p\wedge q\iff q$ y $q\wedge p\iff p$ son falsas. Luego, si q es verdadera, como $p\wedge q\iff q$ es falsa, debemos tener que p es falsa, lo que implica que $q\wedge p\iff p$ es verdadera, contradicción. Por lo tanto, q debe ser falsa, pero entonces $q\wedge p\iff q$ sería verdadera, nuevamente una contradicción. Nuestro supuesto inicial debe estar mal, i.e., se tiene que

  $$(p\wedge q \iff q)\vee(q\wedge p\iff p)$$

  es una tautología.

PROBLEMA 2:

(i.1).- Veremos dos formas de demostrar la igualdad

- **Primera Forma**: Como para todo conjunto X e Y se tiene que $X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$,

  $$\begin{aligned}(A\Delta B)\cup(B\Delta C) &= (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus B)\\ &= (A\cap B^c)\cup(C\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\cup(B\cap C^c)\\ &= [(A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)\cup(C\cap B^c)]\cup[(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c)\cup(B\cap C^c)]\\ &= (A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)\\ &= (A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\,.\end{aligned}$$

  <u>Nota</u>: El mismo argumento se puede reproducir, de manera menos elegante, usando lógica proposicional, i.e., señalando que

  $$\begin{aligned}x\in(A\Delta B)\cup(B\Delta C) &\iff (x\in(A\cap B^c)\cup(C\cap B^c))\vee(x\in(B\cap A^c)\cup(B\cap C^c))\\ &\iff \ldots\ldots\\ &\iff x\in(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\,.\end{aligned}$$

- **Segunda Forma**: Como para todo conjunto X e Y se tiene que $X\Delta Y=(X\cup Y)\cap(Y^c\cup X^c)$,

  $$\begin{aligned}(A\Delta B)\cup(B\Delta C) &= [(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)]\cup[(B\cup C)\cap(B^c\cup C^c)]\\ &= (A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup C\cup C^c)\cap(A^c\cup B^c\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)\\ &= (A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C^c)\\ &= (A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\,.\end{aligned}$$

  <u>Nota</u>: Nuevamente, el mismo argumento se puede reproducir, de manera menos elegante, usando lógica proposicional, i.e., señalando que

  $$\begin{aligned}x\in(A\Delta B)\cup(B\Delta C) &\iff (x\in(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c))\vee(x\in(B\cup C)\cap(B^c\cup C^c))\\ &\iff \ldots\ldots\\ &\iff x\in(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)\,.\end{aligned}$$

(i.2).- Veremos varias formas de hacer esta parte.

- **Primera Forma**: Como $X\Delta\emptyset = X$ cualquiera sea el conjunto X, $B\Delta B = \emptyset$, y Δ es asociativa, tenemos que
$$(A\Delta B)\Delta(B\Delta C) = A\Delta B\Delta B\Delta C = A\Delta\emptyset\Delta C = A\Delta C\,.$$
Pero $X\Delta Y \subseteq X \cup Y$ cualquiera sean los conjuntos X e Y. Por lo tanto,
$$A\Delta C = (A\Delta B)\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C)\,.$$

- **Segunda Forma**: Por (i.1), sabemos que
$$(A\Delta B) \cup (B\Delta C) = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c)\,.$$
Pero, $A \cup C \subseteq A \cup B \cup C$ y $A^c \cup C^c \subseteq A^c \cup B^c \cup C^c$. Por lo tanto,
$$A\Delta C = (A \cup C) \cap (A^c \cup C^c) \subseteq (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)\,.$$

(ii).- Primero observemos que $f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) = \emptyset$ implica que $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$. En efecto, ésto se tiene puesto que si X e Y son conjuntos, entonces $X \setminus Y = \emptyset$ implica que $X \subseteq Y$. Ésta afirmación se puede corroborar de dos maneras.

- **Primera Forma**: Si $X \setminus Y = \emptyset$, entonces $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = \emptyset \cup (X \cap Y) = X \cap Y \subseteq Y$.
- **Segunda Forma**: Si $X \setminus Y = \emptyset$, entonces $x \in X$ implica que $x \in Y$ pues si esto no se tuviera, $x \in X \setminus Y$, lo que contradice el hecho que $X \setminus Y = \emptyset$.

Veremos dos formas de demostrar que dada la hipótesis $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A)$.

- **Primera Forma**: Por propiedades de pre–imagen,
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A)\,,$$
donde la última igualdad se tiene porque $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$.

- **Segunda Forma**: Por definición de pre–imagen,
$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Longleftrightarrow f(x) \in A \cup B \Longleftrightarrow (f(x) \in A) \vee (f(x) \in B)\,.$$
Nuevamente por definición de pre–imagen, obtenemos que
$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \vee (x \in f^{-1}(B))\,.$$
Ahora, como $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$, si $x \in f^{-1}(B)$, entonces $x \in f^{-1}(A)$. Sigue que
$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Longrightarrow x \in f^{-1}(A)\,,$$
i.e., $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A)$. La otra inclusión es evidente, puesto que $A \subseteq A \cup B$ implica que $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A \cup B)$.

PROBLEMA 3:

(i).- Para establecer la sobreyectividad de φ hay que mostrar que cualquiera sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existen dos rectas $L, L' \in \mathcal{L}$ no paralelas tales que $\varphi((L, L')) = (x_0, y_0)$, o equivalentemente, $L \cap L' = \{(x_0, y_0)\}$. Esto último es directo, pues por todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se pueden trazar una infinidad de rectas no paralelas entre si que pasen por dicho punto. En particular, las rectas L_{0,y_0} y L_{1,y_0-x_0} son tales que $L_{0,y_0} \cap L_{1,y_0-x_0} = \{(x_0, y_0)\}$ y por lo tanto $\varphi((L_{0,y_0}, L_{1,y_0-x_0})) = (x_0, y_0)$.

(ii.1).- Veremos varias formas de hacer este parte.

- **Primera Forma**: Como la composición de funciones biyectivas es biyectiva, se tiene que $h \circ f$ es biyectiva para todo $h, f \in \mathcal{F}$. Claramente, tanto el dominio como el recorrido de $h \circ f$ es E, luego $h \circ f \in \mathcal{F}$.

- **Segunda Forma**: Obviamente se podía haber probado que $h \circ f$ es biyectiva estableciendo que es inyectiva y sobreyectiva. Este argumento es mucho más largo y equivale a re–demostrar el resultado que dice que la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Por estar en los apuntes, omitimos de ésta pauta éste argumento.

- **Tercera Forma**: Observar que $f^{-1} \circ h^{-1}$ existe, puesto que tanto h como f son biyectivas. Además, $(f^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f) = (h \circ f) \circ f^{-1} \circ h^{-1} = id_E$, i.e., $h \circ f$ tiene inversa $f^{-1} \circ h^{-1}$. Como invertibilidad es equivalente a biyectividad esto permite obtener la conclusión deseada.

(ii.2) Veremos dos formas de establecer la biyectividad de φ_f.

- **Primera Forma**: Mostrando que φ_f es invertible, luego necesariamente biyectiva. En efecto, como f es biyectiva, f^{-1} existe. Luego, también existe $\varphi_{f^{-1}}$. Además, para todo $h \in \mathcal{F}$,

  $$\varphi_{f^{-1}} \circ \varphi_f(h) = \varphi_{f^{-1}}(\varphi_f(h)) = \varphi_{f^{-1}}(h \circ f) = (h \circ f) \circ f^{-1} = h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ id_E = h\,,$$

  i.e., $\varphi_{f^{-1}} \circ \varphi_f = id_{\mathcal{F}}$. Análogamente, $\varphi_f \circ \varphi_{f^{-1}} = id_{\mathcal{F}}$, por lo que φ_f es invertible (de hecho hemos mostrado que tiene inversa $\varphi_{f^{-1}}$).

- **Segunda Forma**: Estableciendo la inyectividad y sobreyectividad de φ_f por separado.

  Veamos primero la inyectividad. Tenemos que probar que cualquiera sean $h, h' \in \mathcal{F}$, si $\varphi_f(h) = \varphi_f(h')$, entonces $h = h'$. En efecto,

  $$\varphi_f(h) = \varphi_f(h') \iff h \circ f = h' \circ f \iff h \circ f \circ f^{-1} = h' \circ f \circ f^{-1} \iff h \circ id_E = h' \circ id_E \iff h = h'\,.$$

  Veamos ahora la sobreyectividad. Tenemos que probar que cualquiera sea $g \in \mathcal{F}$ existe un $h \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_f(h) = g$, i.e., que $h \circ f = g$. Como f es biyectiva, tiene inversa y por lo tanto podemos definir $h = g \circ f^{-1}$. Claramente, $\varphi_f(h) = g \circ f^{-1} \circ f = g$.