Fecha: 18 de abril del 2002
Tiempo: 3 horas

Pauta Control 1 MA-11A Álgebra

1. (a) i. **Forma 1** $\bar{p} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{p}) \Leftrightarrow p|p$.
Forma 2 $\bar{p} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{V}) \Leftrightarrow p|V$.

[0/1 pto]

ii. **Forma 1** $(p \vee q) \Leftrightarrow ((\overline{\bar{p}}) \vee (\overline{\bar{q}})) \Leftrightarrow (\bar{p}|\bar{q}) \Leftrightarrow ((p|p)|(q|q))$.
Forma 2 $(p \vee q) \Leftrightarrow ((\overline{\bar{p}}) \vee (\overline{\bar{q}})) \Leftrightarrow (\bar{p}|\bar{q}) \Leftrightarrow ((p|V)|(q|V))$.

[0/1 pto]

iii. **Forma 1** $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \wedge q)}} \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \Leftrightarrow \overline{(p|q)} \Leftrightarrow ((p|q)|(p|q))$.
Forma 2 $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \wedge q)}} \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \Leftrightarrow \overline{(p|q)} \Leftrightarrow ((p|q)|V)$.

[0/1 pto]

(b) i. $\bar{r} \Leftrightarrow \overline{(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{(p(x) \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge \bar{q})$.

[0/0.5 ptos]

ii. $\bar{s} \Leftrightarrow \overline{((\forall x)p(x)) \Rightarrow q} \Leftrightarrow ((\forall x)p(x)) \wedge \bar{q}$.

[0/0.5 ptos]

iii. Vamos a demostrar que $r \Rightarrow s$.
Forma 1 Por la contrarrecíproca.
Hipótesis: $((\forall x)p(x)) \wedge \bar{q}$.
p.d.q: Para un cierto x' se tiene $p(x')$ y $\bar{q}$.
En efecto: Por hipótesis, basta con considerar como x' a *cualquier* x. Para aquél se tendrá $p(x')$ y también $\bar{q}$.

Forma 2 Por el método directo.
Hipótesis: Para todo x se tiene: SI $p(x)$ ENTONCES q.
p.d.q: SI para todo x se tiene $p(x)$ ENTONCES se tiene q.
En efecto: Asumamos que para todo x se tiene $p(x)$. Debemos ser capaces de concluir que se tiene q. Sea x arbitrario. Como se tiene $p(x)$, por la hipótesis podemos concluir que entonces se tiene q.

[0/2 ptos]

2. (a) **Forma 1** Combinando las dos hipótesis se tiene

$$(A \cap W) \cup (A \cap W^c)) \subseteq (B \cap W) \cup (B \cap W^c).$$

`[0/1.5 ptos]`

Por distributividad: $A \cap (W \cup W^c) \subseteq B \cap (W \cup W^c)$. Como $U = W \cup W^c$ y $X \cap U = X$ se concluye que $A \subseteq B$.

`[0/1.5 ptos]`

Forma 2 Sea $x \in A$. Debemos probar que $x \in B$.

`[0/1 pto por dividir por casos]`

CASO 1: $x \in W$.
En este caso $x \in (A \cap W)$. Como $(A \cap W) \subseteq (B \cap W) \subseteq B$, se tiene que $x \in B$.

`[0/1 pto]`

CASO 2: $x \in W^c$.
En este caso $x \in (A \cap W^c)$. Como $(A \cap W^c) \subseteq (B \cap W^c) \subseteq B$, se tiene que $x \in B$.

`[0/1 pto]`

(b) **Forma 1** Notar que $[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] = A \Delta B$. Luego, la hipótesis es $A \Delta B = B$.

`[0/1 pto]`

Luego, $(A \Delta B) \Delta B = B \Delta B$.

`[0/1 pto]`

Como la operación Δ es asociativa y $B \Delta B = \phi$, se tiene que $A = \phi$.

`[0/1 pto]`

Forma 2 Por la conrarrecíproca. Supongamos que $A \neq \phi$. Es decir, existe un cierto $x_0 \in A$.

p.d.q: $[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] \neq B$

`[0/0.5 ptos]`

En efecto:

`[0/0.5 ptos por dividir por casos]`

CASO 1: $x_0 \in B$.
Basta con demostrar que $x_0 \notin [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)]$. Como $x_0 \notin A^c$ y $(A^c \cap B) \subseteq A^c$, se tiene que $x_0 \notin (A^c \cap B)$. Como $x_0 \notin B^c$ y $(A \cap B^c) \subseteq B^c$, se tiene que $x_0 \notin (A \cap B^c)$. Es decir, $x_0 \notin [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)]$.

`[0/1 pto]`

CASO 2: $x_0 \notin B$.
Basta con demostrar que $x_0 \in [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)]$. Como $x_0 \in A$ y $x_0 \in B^c$, se tiene que $x_0 \in (A \cap B^c)$. Como $(A \cap B^c) \subseteq [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)]$, se tiene que $x_0 \in [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)]$.

`[0/1 pto]`

3. (a) i. A. Sea $z \in Z$. Como $t \circ s$ es sobreyectiva, para un cierto $x \in X$ se tiene $t(s(x)) = z$. Luego, para $y = s(x)$ se tiene que $t(y) = z$.
`[0/0.5 ptos]`

B. Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $s(x_1) = s_(x_2)$. sigue que $t(s(x_1)) = t(s(x_2))$. Por inyectividad de $(t \circ s)$ se tiene que $x_1 = x_2$.
`[0/0.5 ptos]`

C. Por la observación, $t^{-1} \circ (t \circ s)$ es sobreyectiva. Luego $(t^{-1} \circ t) \circ s = s$ es sobreyectiva.
`[0/0.5 ptos]`

D. $(t \circ s) \circ s^{-1}$ es inyectiva. Luego $t \circ (s \circ s^{-1}) = t$ es inyectiva.
`[0/0.5 ptos]`

ii. **Forma 1** Como $(f \circ g) \circ h$ es inyectiva y $h \circ (f \circ g)$ es sobreyectiva se tiene que h es biyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

Como $g \circ (h \circ f)$ es inyectiva y $(h \circ f) \circ g$ es sobreyectiva se tiene que $(h \circ f)$ es biyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

De esto último, y por la biyectividad de h, se concluye la biyectividad de f. Esto puede verse de muchos modos: por ejemplo, $(h \circ f)$ inyectiva implica f inyectiva; mientras que $(h \circ f)$ sobreyectiva y h biyectiva implica f sobreyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

Finalmente, como $g \circ (h \circ f)$ es inyectiva y $(h \circ f)$ es biyectiva, se tiene que g es inyectiva. Análogamente, como $(h \circ f) \circ g$ es sobreyectiva y $(h \circ f)$ es biyectiva, se tiene que g es sobreyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

Forma 2 Como $(f \circ g) \circ h$ es inyectiva y $h \circ (f \circ g)$ es sobreyectiva se tiene que h es biyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

Como $(f \circ g) \circ h$ es inyectiva y h es biyectiva se tiene que $(f \circ g)$ es inyectiva. Como $h \circ (f \circ g)$ es sobreyectiva y h es biyectiva se tiene que $(f \circ g)$ es sobreyecticva. O sea, $(f \circ g)$ es biyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

Como $(g \circ h) \circ f$ es inyectiva se tiene que f es inyectiva. Como $(f \circ g)$ es biyectiva se tiene que f es sobreyectiva. O sea, f es biyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

De esto último, y por la biyectividad de $(f \circ g)$, se concluye la biyectividad de g. Esto puede verse de muchos modos: por ejemplo, $(f \circ g)$ inyectiva implica g inyectiva; mientras que $(f \circ g)$ sobreyectiva y f biyectiva implica g sobreyectiva.

`[0/0.5 ptos]`

(b) SOBREYECTIVIDAD: f es sobreyectiva. En efecto:

Sea $Y \in \mathcal{P}(A)$
p.d.q: para un cierto $X \in \mathcal{P}(U)$ se tiene $f(X) = Y$.
En efecto: Basta con considerar $X = Y$. Obviamente $X \in \mathcal{P}(U)$ y además, como $Y \subseteq A$,

$$f(X) = X \cap A = Y \cap A = Y.$$

`[0/1 pto]`

INYECTIVIDAD: f no es inyectiva. En efecto:

Basta con exhibir dos elementos en el dominio a los que les corresponda, vía f, el mismo elemento en el recorrido.

Como $A \neq U$, existe un elemento $x_0 \in U$ tal que $x_0 \notin A$. Notar que $A \neq (A \cup \{x_0\})$.

`[0/0.5 ptos]`

Sigue que $f(A) = A \cap A = A$. Y por otro lado:

$$f(A \cup \{x_0\}) = (A \cup \{x_0\}) \cap A = (A \cap A) \cup (\{x_0\} \cap A) = A \cup \phi = A.$$

`[0/0.5 ptos]`