Pauta Control 1 MA-11A- ALGEBRA
2 de Mayo de 1996

P1.

(i) a) Para construir la proposición s nos fijamos en las situaciones de la tabla de verdad donde s es verdadera. Por otro lado, para asegurar que los valores de verdad de p, q y r en las líneas donde s es verdadera de q y r en las líneas donde s es verdadera producen efectivamente un verdadero hay que producir la proposición que consiste en unir con conjunciones las proposiciones p o $\bar{p}$, q o $\bar{q}$, r o $\bar{r}$, de acuerdo a sí son V o F en la línea respectiva.

En este caso el resultado es:

$$s \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$$

Reduzcamos la proposición,

$$\begin{aligned}
&s \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge (r \vee \bar{r})] \vee [(p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r})]\\
&s \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})\\
&s \Leftrightarrow (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{r}) \wedge (q \vee \bar{r})\\
&s \Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow q)\\
&s \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)\\
&s \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)
\end{aligned}$$

(ii) (1era. forma): Del desarrollo anterior y usando la transitividad del implica se deduce que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$
(2da. forma): Basta probar que si s es verdadero entonces $(r \Rightarrow p)$ es verdadera. Es claro de la tabla que si s es verdadera entonces r es falsa en cuyo caso $(r \Rightarrow p)$ es verdadera, o r es verdadera y p es verdadera concluyendo también que $(r \Rightarrow p)$ es verdadera.

(iii) (1era. forma): Sea x un elemento y sea $p \Leftrightarrow x \in A, q \Leftrightarrow x \in B, r \Leftrightarrow x \in C$. Estudiemos el valor de verdad de la proposición:

$$(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow (x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in C \setminus [B \cup (C \setminus A)])$$

En términos de p, q y r se escribe:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow r \wedge (\bar{q} \wedge (\bar{r} \vee p)))$$

desarrollando tenemos que la proposición es equivalente con:

$$(p \wedge \bar{r}) \vee ((p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q} \wedge r))$$

que a su vez es equivalente con

$$\begin{aligned}(p \wedge \bar{r}) \vee ((\bar{p} \vee q) \vee r) &\Leftrightarrow (p \vee \bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{r} \vee \bar{p} \vee q \vee r) \\ &\Leftrightarrow V\end{aligned}$$

<u>2da. forma</u>: Calculemos directamente $C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$

$$\begin{aligned}C \setminus [B \cup (C \setminus A)] &= C \cap [B^c \cap (C^c \cup A)] \\ &= [(C \cap C^c) \cup (C \cap A)] \cap B^c \\ &= C \cap A \cap B^c\end{aligned}$$

pero si $A \subseteq C$, entonces $C \cap A = A$, lo que implica que

$$C \setminus [B \cup (C \setminus A)] = A \cap B^c = A \setminus B$$

P2.

(i) Por inducción. Probemos que la proposición es cierta para $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1+1} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6},$$

luego se cumple.

Consideremos la hipótesis de inducción (H.I) en $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}.$$

Probemos la desigualdad para $n + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+n+2} + \frac{1}{n+n+3} - \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{(n+1)(2n+3) + (n+1)(2n+2) - (2n+2)(2n+3)}{(2n+2)(2n+3)(n+1)} \\ &\leq \frac{5}{6} + \frac{-(n+1)}{(2n+2)(2n+3)(n+1)} = \frac{5}{6} - \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{5}{6}\end{aligned}$$

(ii) (a)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) \cdot b_k + \sum_{k=p}^{n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) \\ &= \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} b_k - \sum_{k=p}^{n} a_k \cdot b_k + \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} b_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} b_k \\ &= -a_p b_p - \sum_{k=p+1}^{n} a_k \cdot b_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k \cdot b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_p \cdot b_p\end{aligned}$$

(b) Notar que

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}.$$

Entonces,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{H_k}{k(k-1)} = -\sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) \cdot H_k$$

usando la fórmula de la parte (a) se deduce:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n} \cdot H_{n+1} + \frac{1}{2-1} H_2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}(H_{k+1} - H_k) \\
&= \frac{-H_{n+1}}{n} + H_2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{-H_{n+1}}{n} + (1 + \frac{1}{2}) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{-H_{n+1}}{n} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\
&= 2 - \frac{H_{n+1}}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 2 - \left(\frac{H_n + 1}{n} \right)
\end{aligned}$$

P3. (i)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (k-1) \cdot k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot k \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} n(n-1) p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n(n-1) p^{k+2} q^{n-(k+2)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n p^{k+1} q^{n-(k+1)} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{(n-2)-k} + n \cdot p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{(n-1)-k}
\end{aligned}$$

Aplicando Teorema del Binomio de Newton,

$$\begin{aligned}
&= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} + n \cdot p (p+q)^{n-1} \\
&= n(n-1)p^2 + np \\
&= np((n-1)p + 1)
\end{aligned}$$

(ii) Probemos que $\{x\} \subseteq \bigcap_{i \in I(x)} A_i$.

Como $i \in I(x)$ entonces por definición $x \in A_i$, es decir

$$\forall i \in I(x), x \in A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I(x)} A_i.$$

Para la recíproca pensemos por contradicción. Supongamos que existe $y \neq x$ en $\bigcap_{i \in I(x)} A_i$. Entonces por propiedad se tiene que existen A_{i^*} y A_{j^*} disjuntos tales que $x \in A_{i^*}$ y $y \in A_{j^*}$. En ese caso $i^* \in I(x)$ pero $y \notin A_{i^*}$, es decir $y \notin \bigcap_{i \in I(x)} A_i$, que es una contradicción. Luego $\{x\} = \bigcap_{i \in I(x)} A_i$.