PAUTA CONTROL 1 - MA11A-ALGEBRA 1998

Pregunta 1.

(a) Hay que probar si es cierto que

$$\begin{array}{r} (p \vee (q \wedge r) \qquad\qquad \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q) \Leftrightarrow \quad V \\ \wedge\ (p \Rightarrow\ q) \Leftrightarrow\ F \end{array}$$

Si $p \Rightarrow q$ es falso, luego p es V y q es F,

luego

$$p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad V \vee (F \wedge r) \Leftrightarrow V \vee F \Leftrightarrow V$$

y

$$(p \vee r) \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad (V \vee r) \wedge F \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$$

luego

$$(p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q) \Leftrightarrow F$$

luego no es posible que la segunda sea V si $(p \Rightarrow q)$ es F.

(b) Supongamos $(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r)$ es V y probemos que la proposición $(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$ es V:

$$\begin{array}{rcc}
(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) & \Leftrightarrow & (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee r) \\
 & \Leftrightarrow & (\bar{q} \wedge \bar{p}) \vee (\bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge r) \\
 & \Leftrightarrow & (\bar{q} \wedge \bar{p}) \vee (\bar{q} \wedge r) \vee F \vee (p \wedge r) \\
 & \Leftrightarrow & (\bar{q} \wedge \bar{p}) \vee (\bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\text{usando hipótesis} & \Leftrightarrow & (\bar{q} \wedge \bar{p}) \vee (\bar{q} \wedge r) \vee (p \vee q) \\
 & \Leftrightarrow & (\bar{q} \wedge \bar{p}) \vee p) \vee ((\bar{q} \wedge r) \vee q) \\
 & \Leftrightarrow & ((\bar{q} \vee p) \wedge (p \vee \bar{p})) \vee ((\bar{q} \vee q) \wedge (r \vee q)) \\
 & \Leftrightarrow & ((\bar{q} \vee p) \wedge V) \vee (V \wedge (r \vee q)) \\
 & \Leftrightarrow & (\bar{q} \vee p) \vee (r \vee q) \\
 & \Leftrightarrow & (\bar{q} \vee q) \vee (p \vee r) \\
 & \Leftrightarrow & V \vee (p \vee r) \\
 & \Leftrightarrow & V
\end{array}$$

(c) $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow \overline{r}) \Rightarrow (p \Rightarrow \overline{r})$

Pregunta 2.

(a.1) $A\Delta B = A\Delta C$ lo asumimos cierto,

luego $\quad A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C)$.

Calculemos $\quad A\Delta(A\Delta B)$:

$$\begin{aligned}
A\Delta(A\Delta B) &= (A\cap(A\Delta B)^c)\cup((A\Delta B)\cap A^c)\\
&= (A\cap((A\cup B)^c\cup(A\cap B)))\cup((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))\cap A^c)\\
&= (A\cap(A^c\cap B^c))\cup(A\cap(A\cap B))\cup((A\cap B^c)\cap A^c)\cup((B\cap A^c)\cap A^c)\\
&= \phi\cup(A\cap B)\cup\phi\cup(A^c\cap B)\\
&= (A\cap B)\cup(A^c\cap B)\\
&= (A\cup A^c)\cap B\\
&= U\cap B = B
\end{aligned}$$

luego $A\Delta(A\Delta C) = C$ y concluimos que $B = C$.

(a.2) Si $A\Delta B = C$, para calcular $A\Delta C$ hay que hacer $\quad A\Delta(A\Delta B)(= A\Delta C)$.
Pero en (a.1) vimos que $A\Delta(A\Delta B) = B$, luego $A\Delta C = B$.

(b) **Inyectividad de f:** Sean $X_1, X_2 \subseteq E$ y supongamos $f(X_1) = f(X_2)$:

$f(X_1) = f(X_2) \Leftrightarrow X_1\Delta A = X_2\Delta A \Leftrightarrow X_1 = X_2 \quad$ (por a.1)

Luego f es inyectiva.

Sobreyectividad de f: Sea $Y \subseteq E$. Probemos que existe $X \subseteq E$.

tal que $f(X) = X\Delta A = Y$. Para ésto usamos a.2. Si un tal X existe, entonces $X = Y\Delta A$. En efecto $(Y\Delta A)\Delta A = Y$ de (a.1). Luego f es sobreyectiva.

Esto sirve para concluir que f es biyectiva.

La inversa de f ya la calculamos en el punto anterior y es f. En efecto,

$$\begin{aligned}
fof(Y) &= f(f(Y))\\
&= (Y\Delta A)\\
&= Y.
\end{aligned}$$

Pregunta 3.

(a) Supongamos $f(B) \setminus f(A) = \phi$. Luego,

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = (f(B) \setminus f(A)) \cup f(A) = \phi \cup f(A) = f(A)$$

(b) Sean $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$. Probamos que $f(x_1) \neq f(x_2)$:

Sea $B = \{x_1\ , x_2\}$ y $A = \{x_1\}$, luego $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Luego $f(A) = \{f(x_1)\} \neq f(B) = \{f(x_1)\ , f(x_2)\}$

Luego $f(x_2) \neq f(x_1)$, sino $f(A) = f(B)$.

Esto sirve para concluir que f es inyectiva.

(c) Para calcular g componemos $g\ o\ f$ con f^{-1} y la evaluamos en $x \in I\!R$:

$$\begin{aligned}
(g\ o\ f)\ o\ f^{-1}(x) &= (g\ o\ f)(f^{-1}(x)) \\
&= (g\ o\ f)(\frac{x-2}{3}) \quad = \frac{3(\frac{x-2}{3})+2}{9(\frac{x-2}{3})^2 + 12(\frac{x-2}{3}) + 5} \\
&= \frac{x}{x^2+4-4x+4x-8+5} = \frac{x}{x^2+1} \\
\Rightarrow (g\ o\ f)\ o\ f^{-1}(x) &= g\ o\ (f\ o\ f^{-1})(x) = g\ o(id_{I\!R})(x) \\
&= \frac{x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Para calcular f basta buscar para $y \in I\!R$ un $x \in I\!R$ tal que $y = f^{-1}(x)$:

$y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} \Rightarrow x = 3y + 2 \Rightarrow f(y) = 3y + 2$