PAUTA CONTROL 1 - MA11A-ALGEBRA

(1999)

Pregunta 1.

(a) Sabemos que $(s \Rightarrow (\overline{r} \ \vee \ r)) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r})$ es verdadera. Notemos primero que $(s \Rightarrow (\overline{r} \ \vee \ r))$ es verdadero pues $(\overline{r} \vee r)$ es siempre verdadera. Luego $\overline{p \Rightarrow q} \wedge s \wedge \overline{r}$ debe ser verdadera. De aquí deducimos que $p \Rightarrow q$, s y $\overline{r}$ son verdaderas. Como $p \Rightarrow q$ es equivalente con $p \wedge \overline{q}$ y es verdadera, deducimos que p y $\overline{q}$ son verdaderas. Hemos deducido:

$$\begin{array}{llllll} s & \rightarrow & V & & & \\ \overline{r} & \rightarrow & V & \Rightarrow \vee & \rightarrow & F \\ P & \rightarrow & V & & & \\ \overline{q} & \rightarrow & V & \Rightarrow q & \rightarrow & F \end{array}$$

(b) Sabemos que $(B \setminus A) \subseteq C$, es decir, $B \cap A^c \subseteq C$, luego $C^c \subseteq (B \cap A^c)^c = B^c \cup A$.

$$\text{Luego} \quad \begin{array}{rcl} C^c \cap D \subseteq (B^c \cup A) \cap D & = & (B^c \cap D) \cup (D \cap A) \\ & = & (D \setminus B) \cup (D \cap A) \end{array}$$

Como $(D \cap A) \subseteq A$, entonces $(D \setminus B) \cup (D \cap A) \subseteq (D \setminus B) \cup A$.

(c) $(\Rightarrow)$ Si $A \cap B = \phi$ y $C \in (\mathcal{P}\ (A) \cap P(B))$. Entonces $C \ \subseteq A$ y $C \ \subseteq \ B$ por lo tanto $C \subseteq (A \cap B)$ lo que es una contradicción.

$(\Leftarrow)$ recíprocamente si $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$ como $(A \cap B) \subseteq A \ \wedge \ (A \cap B) \subseteq B$ se tiene que $(A \cap B) \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, luego $A \cap B = \phi$.

Pregunta 2.

(a) Sea $x \in E$, luego

$$\begin{array}{rcl} x \in (g \ o \ f)^{-1}(A) & \Leftrightarrow & (g \ o \ f)(x) \in A \\ & \Leftrightarrow & g(f(x)) \in A \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in g^{-1}(A) \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \end{array}$$

Como lo anterior es cierto en todo elemento de E se tiene que

$$(g \ o \ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

(b) Sea $\underline{x \in f(f^{-1}(B))}$ luego $x = f(y)$ para un cierto $y \in f^{-1}(B)$.

Luego $f(y) \in B$ y $x \in B$. Por otro lado, como $y \in E$ se tiene que x también es elemento de $f(E)$. Hemos probado que $\underline{x \in B \cap f(E)}$.

Recíprocamente si $\underline{x \in B \cap f(E)}$ entonces $x = f(y)$ para un cierto $y \in E$ y además $x \in B$. Es decir $f(y) \in B$. De aquí se deduce que $y \in f^{-1}(B)$ y $x = f(y)$. Esto es equivalente con $\underline{x \in f(f^{-1}(B))}$.

Pregunta 3.

(a)

(a.1) -Si f es inyectiva y g biyectiva $\Rightarrow f\ o\ g$ es inyectiva.
-Si f o g es inyectiva y existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, como g es biyectiva $x_1 = g(g^{-1}(x_1))\ y\ x_2 = g(g^{-1}(x_2))$. Entonces

$$f(x_1) = f(g(g^{-1}(x_1))) = f(g(g^{-1}(x_2))) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \qquad f\ o\ g(g^{-1}(x_1)) = f\ o\ g(g^{-1}(x_2))$$

Como $f\ o\ g$ es inyectiva $\Rightarrow$ $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$

Como g^{-1} es inyectiva $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

(a.2) -Si f es sobreyectiva como g es biyectiva $\Rightarrow g\ o\ f$ es sobreyectiva.
-Si g o f es sobreyectiva entonces $g\ o\ f(A) = A$ es decir $g(f(A)) = A$.

-Si $f(A) \subseteq A$ pero $f(A) \neq$ entonces existen $x_1 \in f(A)\ y\ x_2 \in A \setminus f(A)$ tal que $g(x_1) = g(x_2)$.
Como g es biyectiva se tendrá $x_1 = x_2$. Esto es una contradicción pues $x_1\ y\ x_2$ están en conjuntos distintos: luego $f(A) = A$.

(b)

(b.1) Sea $y \in I\!R \setminus \{2\}$ y busquemos $x \in I\!R \setminus \{2\}$ tal que

$$\frac{2x+1}{x-2} = y$$

Resolvemos la ecuación en x:

$$\begin{aligned} 2x+1 = y(x-2) \quad &\Leftrightarrow \quad (2-y)x = -1-2y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{2y+1}{y-2} \end{aligned}$$

Hay que ver que el x obtenido es distinto de 2

$$\frac{2y+1}{y-2} = 2 \Leftrightarrow 2y+1 = 2y-4 \Leftrightarrow 1 = -4$$

luego $\frac{2y+1}{y-2} \neq 2$, para cada $y \in I\!R \setminus \{2\}$ y f es sobreyectiva.

(b.2) Supongamos $f(x_1) = f(x_2)$, luego

$$\begin{array}{rcc} \frac{2x_1+1}{x_1-2} = \frac{2x_2+1}{x_2-2} & \Rightarrow & 2x_1\ x_2 + x_2 - 4x_1 - 2 = 2x_1\ x_2 + x_1 - 4x_2 - 2 \\ & \Rightarrow & 2(x_2 - x_1) = 4(x_1 - x_2) \\ & \Rightarrow & 5(x_2 - x_1) = 0 \\ & \Rightarrow & x_2 = x_1 \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

(b.3) -$Por(b.1)$ $g\ (I\!R \setminus \{2\}) = I\!R \setminus \{2\}$ y si $g\ (x_1) = g(x_2)$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$, como f es inyectiva entonces g es inyectiva. Esto prueba que g es biyectiva.

-Busquemos la inversa:

$$\begin{array}{rcc} g(x) = y & \Leftrightarrow & x = g^{-1}(y) \\ & \Leftrightarrow & \frac{2x+1}{x-2} = y \\ & \Leftrightarrow & x = \frac{2y+1}{y-2} \end{array}$$

Luego $g^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-2}$.