Pauta Control #1 MA11A Algebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 23/04 18:00). Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pauta Control 1

Algebra MA11A

Problema 1

(i) Sean p, q, r proposiciones. Pruebe sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una Tautología.

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\sim (q \wedge p) \Rightarrow \sim (p \wedge r)]$

Solución

Sean p, q, r proposiciones, entonces

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\sim (q \wedge r) \Rightarrow \sim (p \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$ contrarecíproco

$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow [\sim (p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ Definición de $\Rightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Rightarrow [\sim (p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ Definición de $\Rightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Rightarrow [\sim p \vee \sim r \vee (q \wedge r)]$ Ley de Morgan
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Rightarrow [\sim p \vee [(\sim r \vee q) \wedge (r \sim \vee r)]]$ Distributividad $\sim r \vee (...)$
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Rightarrow [\sim p \vee [(\sim r \vee q) \wedge \ V]]$ $\sim r \vee r \Leftrightarrow V$ Tautología
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Rightarrow [\sim p \vee (\sim r \vee q)]$ $A \wedge V \Leftrightarrow A$ Tautología
$\Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim r \vee q)$ Definición de $\Rightarrow$
$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q) \vee \sim r$ Ley de Morgan
$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim (p \wedge \sim q) \vee \sim r$ Ley de Morgan
$\Leftrightarrow V \vee \sim r$ $A \vee \sim A \Leftrightarrow V$ Tautología
$\Leftrightarrow V$

2.0 ptos.

Observación :

- Pueden omitirse algunos pasos y/o comentarios.
- Existen alternativas.

(ii) Sean p, q, r, s proposiciones que satisfacen la siguiente hipótesis:

$(q$ es $V)$ $\wedge[(p \wedge q)$ no es equivalente con $(r \Leftrightarrow s)]$

Demuestre que el valor de verdad de la proposición
$[(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)]$ (M) es verdadero para todas las combinaciones de valores veritativos que cumplen la hipótesis.

Solución

Si llamamos M a la proposición en estudio y se observa que las alternativas de valores que cumplen la hipótesis son limitadas, se tiene:

1er Caso: q es V y p es V

Esto significa que el término $[p \vee (r \wedge s)]$ de M toma la forma $[V \vee (r \wedge s)] \Leftrightarrow V$ independiente de r y s. Entonces :

M $\Leftrightarrow \{[(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Rightarrow V\}$ que es V.

2do Caso : q es V y p es F

En tal caso $p \wedge q$ es falso y de la hipótesis se deduce $(p \Leftrightarrow s)$ es V, es decir, r y s, ambos V o ambos F.

Si r es V y s es V, entonces $(r \wedge r)$ es V y nuevamente el término $[p \vee (r \wedge s)]$ de M es V de donde $[(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Rightarrow V$ es verdadero, es decir, M es V.

Si r es F y s es F entonces $(p \wedge r)$ es F y $(q \Rightarrow s) \Leftrightarrow (V \Rightarrow F)$ es también falso.
Así el término $[(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$, y en consecuencia M toma la forma $F \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)]$ que es verdadero, independientemente del segundo término.

Se ha probado que M$\Leftrightarrow V$ en todos los casos posibles.
2.0 ptos.

Observaciones:

(1) Si el alumno omite cualquier alternativa, bajar 0.5 ptos por cada omisión.

(2) Se acepta también, el análisis tabulado caso a caso:

q	p	r	s
V	V	V	F
V	V	V	V
V	F	V	V
V	F	F	F

(3) En caso extremo, si tabula los 16 arreglos y extrae los 4 posibles, considerar como máximo 1.5 ptos.

(iii) Sea $A \subseteq U$ en que U tiene dos o más elementos distintos. Pruebe que:

$[\forall B \in (P(U) - \{\phi\})](A \subseteq B) \Rightarrow A = \phi$

Solución

Como la hipótesis es válida $\forall B \in (P(U) - \{\phi\})$ basta considerar, por ejemplo, $B \in (P(U) - \{\phi\})$ y $B^c \in (P(U) - \{\phi\})$ disjuntos, pués $B \cap B^c = \phi$.
Entonces si $A \subseteq B \wedge A \subseteq B^c \Rightarrow A \subseteq B \cap B^c \Rightarrow A \subseteq \phi$ y como $\phi \subseteq A \quad \forall A$ se concluye que $A = \phi$

2.0 ptos.

Observación

También se pueden tomar $B_1, B_2 \in (P(U) - \{\phi\})$ disjuntos, es decir, $B_1 \cap B_2 = \phi$
Entonces $A \subseteq B_1 \wedge A \subseteq B_2 \Rightarrow A \subseteq B_1 \cap B_2 \Rightarrow A \subseteq \phi \quad$ pero $\quad \phi \subseteq A \quad \forall A$.
Se concluye que $A = \phi$.

Problema 2

(a) Sea U el conjunto universo y $A, B \subseteq U$. Se define

$f : P(U) \longrightarrow P(U)$ como $f(X) = A \cap (B \cup X)$

(i) Pruebe que $fof = f$.
(ii) Si $A \neq U \vee B \neq \phi$, pruebe que f no es inyectiva.
(iii) Si $A \neq U$ pruebe que f no es sobreyectiva (epiyectiva).

Solución

(i) $(f \circ f)(X) = f(f(X)) = A \cap [B \cup \{A \cap (B \cup X)\}]$ Distrib.

$= (A \cap B) \cup [A \cap \{A \cap (B \cup X)\}]$ Asociat.
$= (A \cap B) \cup [A \cap A \cap (B \cup X)]$ $A \cap A = A$
$= (A \cap B) \cup [A \cap (B \cup X)]$ Factorizac.
$= A \cap [B \cup (B \cup X)]$ $B \cup (B \cup X) = B \cup X \qquad (B \subseteq B \cup X)$
$= A \cap (B \cup X)$
$= f(X)$

1.5 ptos

(ii) Hay al menos tres casos básicos que deben considerarse

$A = \phi \neq U$, $B \neq \phi \Rightarrow f(X) = \phi$ que no es inyectiva
$A \neq U$, $B = U \neq \phi \Rightarrow f(X) = A \cap (U \cup X) = A \cap U = A = \text{cte}$ que no es inyectiva
$A \neq U$, $B \neq \phi \Rightarrow f(X) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$ que también es no inyectiva pués, por ejemplo,
$f(\phi) = A \cap B = f(B)$ y $B \neq \phi$

1.5 ptos

(iii) Sea $A \neq U$
Si $A = \phi$, $f(X) = \phi \Rightarrow f(P(U)) = \{\phi\} \neq P(U)$ entonces f no es sobreyectiva
Si $A \neq \phi$ entonces $f(X) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$ y puede ocurrir
$A \cap B = \phi \Rightarrow f(X) = A \cap X \neq A^c \quad \forall X \Rightarrow f$ no es epiyectiva
$A \cap B \neq \phi \Rightarrow f(X) = (A \cap B) \cup (A \cap B) \neq B^c \quad \forall X \Rightarrow f$ no es epiyectiva

Entonces en cualquier caso f no es epiyectiva

1.0 pto

(b) Sea $f : A \longrightarrow B$ y $C \subseteq A$. Se define

$g : C \longrightarrow B$ tal que $g(x) = f(x) \qquad \forall x \in C$

Demuestre que $\forall D \subseteq B, \quad g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

Solución

Sea $x \in g^{-1}(D) \Leftrightarrow g(x) \in D \wedge x \in C$ pues $g : C \longrightarrow B$
$\Leftrightarrow f(x) \in D \wedge x \in C$ pues $g(x) = f(x) \quad \forall x \in C$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(D) \wedge x \in C$ definición de preimagen
$\Leftrightarrow x \in C \cap f^{-1}(D)$

Entonces $g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$
2.0 ptos

Problema 3

Sea $E \neq \phi$ y $f : E \longrightarrow E$ una función. Demuestre que:
(i) f es biyectiva $\Leftrightarrow fof$ es biyectiva.
(ii) $\forall A \subseteq E$, $f(A) = A \Longrightarrow f = id_E$
(iii) Si $E = I\!N$, entonces
$(\forall n_1, n_2 \in I\!N)[n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)] \Rightarrow$ f es inyectiva.
(iv) Si $E = I\!N$ y f satisface (iii), construya una función que demuestre que f no es necesariamente epiyectiva.

Solución

(i) $(\Rightarrow)$
Sea f biyectiva:
como la composición de biyecciones es una biyección se concluye que $f \circ f$ es biyectiva.
1.0 pto.
(ii)$(\Leftarrow)$ Sea $f \circ f$ biyectiva, por propiedad conocida:

$g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva $\wedge$ $g \circ f$ epiyectiva $\Rightarrow g$ epiyectiva

En este caso $f \circ f$ es inyectiva y epiyectiva. Entonces, por la propiedad, considerando que g es también f se concluye que f es inyectiva y epiyectiva y por lo tanto f es biyectiva .
1.0 pto.

Obs: Esta parte, también puede hacerse con definiciones

(ii) $\forall x \in E$ podemos definir $A \subseteq E$ como $A = \{x\}$.
Por hipótesis $\forall A \subseteq E$, $f(A) = A$, entonces
$f(A) = f(\{x\}) = \{f(x)\} = A = \{x\}$
Entonces $\forall x \in E \quad f(x) = x$
por lo tanto $f = id_E$
1.5 ptos.

(iii) Recordar que f es inyectiva si y sólo si
$\forall n_1, n_2 \in I\!N \qquad n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$ (forma contrarecíproca).

Sean $n_1, n_2 \in I\!N$ con $n_1 \neq n_2$

Entonces $(n_1 < n_2) \vee (n_1 > n_2)$ Si $n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$ por hipótesis, entonces $f(n_1) \neq f(n_2)$
Si $n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) > f(n_2)$ por hipótesis, entonces $f(n_1) \neq f(n_2)$

En consecuencia $\forall n_1, n_2 \in I\!N n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$, es decir f es inyectiva

1.5 ptos.

(iv) Basta construir f de modo que cumpla (iii) y
tal que $\quad f(I\!N) \neq I\!N$

Por ejemplo $f : I\!N \longrightarrow I\!N \qquad f(I\!N) = \{\text{pares}\} \neq I\!N$
. $\qquad n \longrightarrow 2n$
Por ejemplo $f : I\!N \longrightarrow I\!N \qquad f(I\!N) = \{\text{impares}\} \neq I\!N$
. $\qquad n \longrightarrow 2n + 1$
Por ejemplo $f : I\!N \longrightarrow I\!N \qquad f(I\!N) = I\!N - \{0\} \neq I\!N$
. $\qquad n \longrightarrow n + 1$

Con cualquier ejemplo, el alumno debe verificar que se cumple (iii) y que f no es epiyectiva
1.0 pto.

Por ejemplo $n_1 < n_2 \Rightarrow 2n_1 < 2n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$
en el caso de los pares.