CONTROL 1 MA11A ALGEBRA
Pauta Problema 1

i) Determine el valor de verdad de las proposiciones $p, q, r,$ y s si se sabe que la siguiente proposiciones es verdadera.

$$[s \Rightarrow (\sim r \vee r)] \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r]$$

Se puede razonar de la siguiente forma:
$\sim r \vee r \Leftrightarrow V$, entonces la proposición $[s \Rightarrow (\sim r \vee r)] \Leftrightarrow [s \Rightarrow V] \Leftrightarrow V$ independiente de s.
De modo que $[s \Rightarrow (\sim r \vee r)] \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r] \Leftrightarrow V \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r]$ que es verdadera.
Así, necesariamente $[\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r] \Leftrightarrow V$ y por lo tanto $\sim (p \Rightarrow q)$ es V, s es V y $\sim r$ es V, es decir $(p \Rightarrow q)$ es F, s es V y r es F con lo cual, finalmente p es V, q es F, s es V y r es F. (2.0 ptos.)
OBSERVACION: Puede argumentarse de otras formas.

ii) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es un Tautología.

$$[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$$

1^{era} **Forma**

$$
\begin{array}{ll}
& [(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \\
\Leftrightarrow & [(q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge r] \quad \text{contrarecíproco y definición de } \Rightarrow \\
\Leftrightarrow & [(r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p) \wedge r] \quad \text{conmutatividad de } \wedge \\
\Rightarrow & [(r \Rightarrow \sim p) \wedge r] \quad \text{Transitividad de } \Rightarrow \\
\Rightarrow & \sim p \quad \text{Propiedad } [(a \Rightarrow b) \wedge a] \Rightarrow b
\end{array}
$$

2^{a} **Forma**

$$
\begin{array}{ll}
& [(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p \\
\Leftrightarrow & [(\sim p \vee \sim q) \wedge \{(r \wedge \sim r) \vee (r \wedge q)\}] \Rightarrow \sim p \quad \text{Distribución de } r \\
\Leftrightarrow & [(\sim p \vee \sim q) \wedge \{F \vee (r \wedge q)\}] \Rightarrow \sim p \\
\Leftrightarrow & [(\sim p \vee \sim q) \wedge r \wedge q] \Rightarrow \sim p \\
\Leftrightarrow & [\{(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)\} \wedge r] \Rightarrow \sim p \quad \text{Distribución de } q \\
\Leftrightarrow & [\{(q \wedge \sim p) \vee F\} \wedge r] \Rightarrow \sim p \\
\Leftrightarrow & [q \wedge \sim p \wedge r] \Rightarrow \sim p \\
\Leftrightarrow & \sim [q \wedge \sim p \wedge r] \vee \sim p \quad \text{Definición de } \Rightarrow \\
\Leftrightarrow & \sim q \vee p \vee \sim r \vee \sim p \quad \text{Leyes de Morgan} \\
\Leftrightarrow & (p \vee \sim p) \vee (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow V \vee (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow V
\end{array}
$$

(2.0 ptos.)

iii) Considere la proposición

$$p \Leftrightarrow [(\exists x_0 \in I\!R)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))] f(x_0) \leq f(x)$$

Para las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$, decida si p es verdadera o falsa. Justifique

- Para la función $f(x) = x$ la proposición p queda:

$$[(\exists x_0 \in I\!R)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))]x_0 \leq x$$

  La proposición es falsa, lo que puede verse mediante su negación

$$\sim p \Leftrightarrow [(\forall x_0 \in I\!R)(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))]x_0 > x$$

  que es verdadera, bastando para comprobarlo, tomar $x = x_0 - \varepsilon/2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ que verifica $x_0 > x_0 - \varepsilon/2 = x, \forall \varepsilon > 0$ (1.0 pto.)

- Para la función $f(x) = x^2$ p queda

$$[(\exists x_0 \in I\!R)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))]x_0^2 \leq x^2$$

  La proposición es, en este caso, verdadera. Basta observar que $x^2 \geq 0$ $\forall x \in I\!R$ con lo que si $x_0 = 0$, p se verifica $\forall \varepsilon > 0$.
  De modo que $[(\exists 0 \in I\!R)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)]0 \leq x^2$ (1.0 pto.)

Pauta Problema 2

a) Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo y $A, B, \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que

$$A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

Probaremos que $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$.
Sea $\mathcal{X} \in P(A) \Rightarrow X \subseteq A$ pero $A = B$ entonces $X \subseteq B \Rightarrow \mathcal{X} \in P(B)$.
Así $P(A) \subseteq P(B)$ y analogamente $P(B) \subseteq P(A)$,
Entonces $P(A) = P(B)$ (1.0 pto.)

$$P(A) = P(B) \Rightarrow A = B$$

Claramente $A \in P(A)$ y como $P(A) = P(B) \Rightarrow A \in P(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Analogamente $B \in P(B) \wedge P(B) = P(A) \Rightarrow B \in P(A) \Rightarrow B \subseteq A$.
Entonces $A = B$ (1.0 pto.)

OBSERVACION: Existen varias alternativas.

b) Sea $\circledast$ la ley de operación entre conjuntos definida por $A \circledast B = A^C \cap B^C$. Considere un universo $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F} \subseteq P(\mathcal{U})$ un conjunto no vacío tal que $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \circledast B \in \mathcal{F}$.
Si $A, B \in \mathcal{F}$ demuestre que:

(i) $A^C \in \mathcal{F}$

(ii) $A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \cup B \in \mathcal{F}$

(iv) $A \Delta B \in \mathcal{F}$

(v) $\phi \in \mathcal{F} \wedge \mathcal{U} \in \mathcal{F}$

Demostración

i) Sea $A \in \mathcal{F}$, es decir $A, A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \circledast A \in \mathcal{F}$ pero $A \circledast A = A^C \cap A^C = A^C$.
Así $A^C \in \mathcal{F}$ (1.0 pto.)

ii) Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Por (i) $A^C, B^C \in \mathcal{F}$ y por definición $A^C \circledast B^C \in \mathcal{F}$.
Pero $A^C \circledast B^C = (A^C)^C \cap (B^C)^C = A \cap B$. Así $A \cap B \in \mathcal{F}$ (0.8 ptos.)

iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \circledast B = A^C \cap B^C \in \mathcal{F}$ pero por (i)
$(A^C \cap B^C)^C \in \mathcal{F}$ y $(A^C \cap B^C)^C = (A^C)^C \cup (B^C)^C = A \cup B$.
Así $A \cup B \in \mathcal{F}$ (0.6 ptos.)

iv) $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$.
Se sabe ya que $A \cup B \in \mathcal{F}, A \cap B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \cap B)^C \in \mathcal{F}$.
$\therefore$ Por (ii) $(A \cup B) \cap (A \cap B)^C \in \mathcal{F}$ es decir $A \Delta B \in \mathcal{F}$ (0.8 ptos.)

v) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ por (i). Por definición $A \circledast A^C \in \mathcal{F}$.
Pero $A * A^C = A^C \cap (A^C)^C = A^C \cap A = \phi$.
Entonces $\phi \in \mathcal{F}$ (0.5 ptos.)
También, $\phi \in \mathcal{F} \Rightarrow \phi^C \in \mathcal{F}$ por (i) con $\phi^C = \mathcal{U}$.
Entonces $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ (0.3 ptos.)

Pauta Problema 3

i) Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre que
f es inyectiva $\Leftrightarrow \exists g : B \to A$ tal que g o $f = id_A$.
Probaremos que f inyectiva $\Rightarrow \exists g : B \to A$ t.q. g o $f = id_A$.
Como f es inyectiva, definimos la función h por

$$\begin{aligned} h : A &\to f(A) \text{ tal que } h(x) = f(x). \text{ De este modo} \\ x &\to h(x) \end{aligned}$$

h será inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto biyectiva.
Entonces existe $h^{-1} : f(A) \to A$ tal que $\forall y \in f(A), h^{-1}(y) = x \in A$
Así, bastará escoger $g : B \to A$ tal que

$$g(y) = \begin{cases} h^{-1}(y) & \text{si } y \in f(A) \\ x_0 \in A(\text{arbitrario}) & \text{si } y \in (B - f(A)) \end{cases}$$

con lo cual g o $f = h^{-1}$ o $f = id_A \ \forall x \in A$. (1.5 ptos.)

OBSERVACION: Hay otras formas de escoger g en $y\varepsilon(B - f(A))$
Si la demostración no es rigurosa pero el alumno entiende la idea, otorgar hasta 1.0 pto.
Probaremos que si $\exists g : B \to A$ t.q. g o $f = id_A \Rightarrow f$ es inyectiva.
Sea $f(x_1) = f(x_2)$ con $f(x_1), f(x_2) \in B$, entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow (g \text{ o } f)(x_1) = g \text{ o } f(x_2) \overset{\text{hipotesis}}{\Longrightarrow} id_A\ (x_1) = id_A\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Entonces f es inyectiva. (1.5 ptos.)

OTRA FORMA
g o $f = id_A$ en que id_A es biyectiva.
Entonces g o f es biyectiva, en particular inyectiva.
Por propiedad (vista en clases) g o f inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.

ii) Sea $f : A \to B$ una función.
Se define $F : P(A) \to P(B)$ por $F(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}) = \{f(x)/x \in \mathcal{X}\} =$ Imagen de $\mathcal{X}$.
$\mathcal{X} \to f\mathcal{X}$
Demuestre que : f es sobreyectiva $\Leftrightarrow F$ es sobreyectiva.
Probaremos que si f es sobreyectiva $\Rightarrow F$ es sobreyectiva.
F es sobreyectiva si $(\forall \mathcal{Y} \in P(B))(\exists \mathcal{X} \in P(A))$ t.q. $\mathcal{Y} = F(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X})$.
Pero f es sobreyectiva, entonces por propiedad (vista o propuesta)
$\forall \mathcal{Y} \in P(B)$, es decir $\mathcal{Y} \subseteq B, f(f^{-1}(\mathcal{Y})) = Y$
Bastará entonces tomar $\mathcal{X} = f^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq A$ con lo cual

$$\exists \mathcal{X} \subseteq A, \text{ o }, \mathcal{X} \in P(A) \text{ t.q. } F(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}) = f(f^{-1}(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y}$$

(1.5 ptos.)

Probaremos que si F es sobreyectiva $\Rightarrow f$ es sobreyectiva.

$$f \text{ es sobreyectiva si } (\forall y \in B)(\exists x \in A), y = f(x)$$

Sea $y \in B \Rightarrow \{y\} \subseteq B \Rightarrow \{y\} \in P(B)$.
Como $F : P(A) \to P(B)$ es sobreyectiva (hipótesis)
$\exists \mathcal{X} \in P(A), \mathcal{X} \neq \phi,$ o bien $\mathcal{X} \subseteq A$ t.q. $F(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}) = \{y\}$
Así, necesariamente $\exists x \in \mathcal{X} \subseteq A$ t.q. $f(x) = y$
Es decir $(\forall y \in B)(\exists x \in A); y = f(x)$ (1.5 ptos.)