CONTROL 1 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1
PROBLEMA 1

i) Si aceptamos que I es verdadera, entonces debe ocurrir que p es V, q es V, r es F, s es V, t es F y u es V. Si por el contrario II es verdadera, entonces ocurre que p es F, q es V, r es V, s es F, t es F y u es V (0,5 ptos.)

Así para (a) $q \wedge s) \Leftrightarrow (p \vee t)$ se tiene

Si I es verdadera: $[(V \wedge V) \Leftrightarrow (V \vee F)] \Leftrightarrow [V \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow V$
Si II es verdadera: $[(V \wedge F) \Leftrightarrow (F \wedge F)] \Leftrightarrow [F \Leftrightarrow F] \Leftrightarrow V$

Entonces (a) es verdadera para cualquier hipótesis (0.5 ptos.)

Para (b) $(q \wedge t) \vee (\sim r \wedge \sim u)$ se tiene:

Si I es verdadera: $[(V \wedge F) \vee (V \wedge F)] \Leftrightarrow [F \vee F] \Leftrightarrow F$
Si II es verdadera: $[(V \wedge F) \vee (F \wedge F)] \Leftrightarrow [F \vee F] \Leftrightarrow F$

Entonces (b) es falsa para cualquier hipótesis (0.5 ptos.)

Para (c) $[\sim (p \Rightarrow t)] \Rightarrow (r \wedge t)$ se tiene:

Si I es verdadera $\{[\sim (V \Rightarrow F)] \Rightarrow (F \wedge F)\} \Leftrightarrow [V \Rightarrow F] \Leftrightarrow F$
Si II es verdadera $\{[\sim (F \Rightarrow F)] \Rightarrow (V \wedge F)\} \Leftrightarrow [F \Rightarrow F] \Leftrightarrow V$

En este caso no se puede decidir el valor veritativo de (c) que depende de las hipótesis

(0.5 ptos.)

(ii) Primera Forma:

$$[(r \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow [(r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)] \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow (\sim r \vee \sim p)$$

(2.0 ptos.)

Segunda Forma:

$$[(r \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow (\sim r \vee \sim p) \Leftrightarrow [(\sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \vee \sim p)$$
$$\Leftrightarrow [\sim r \vee q) \vee \sim (\sim p \vee \sim q)] \vee (\sim r \vee \sim p)] \Leftrightarrow (r \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim p)$$

(1.0 pto.)

$$\Leftrightarrow [(r \wedge q) \vee \sim r] \vee [(p \wedge q) \vee \sim p] \Leftrightarrow [(r \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee [(p \vee \sim p) \wedge (q \vee -p)]$$
$$\Leftrightarrow [V \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee [V \wedge (q \vee \sim p)] \Leftrightarrow \sim q \vee \sim r \vee q \vee \sim p \Leftrightarrow \sim q \vee q \vee (\sim r \vee \sim p)$$
$$\Leftrightarrow V \vee (\sim r \sim p) \Leftrightarrow V$$

(1.0 pto.)

Observación: Deben justificarse brevemente los pasos.

iii) Primera Forma

Se sabe que $(\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

Esto puede escribirse como : $\sim (\exists x)(P(x) \vee (\forall x)P(x)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\sim P(x) \vee (\forall x)P(x)$$

(1.5 ptos.)

Entonces para todo $x, P(x)$ es falso ($\sim P(x)$) o $P(x)$ es verdadero.

(0.5 ptos.)

Segunda Forma

Si suponemos que $(\exists x)P(x)$ es V, entonces sea x_0 tal que $P(x_0)$ es V, pero puede existir x_1 tal que $P(x_1)$ es falso.

En tal caso $(\forall x)P(x)$ es falso y $(V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$ lo que invalida la hipótesis. (1.5 ptos.)

Análogamente, según la forma contrarecíproca puede escribirse

$$\sim (\forall x(P(x)) \Rightarrow \sim (\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim P(x) \Rightarrow (\forall x)(\sim P(x))$$

y se procede como en el paso anterior. (0.5 ptos.)

CONTROL 1 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1
PROBLEMA 2

a) a1) Por demostrar que $(B-A) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$.

En efecto $(B-A) \subseteq C \Leftrightarrow (B \cap A^c) \subseteq C$.

Usando la propiedad $P \subseteq Q \Leftrightarrow Q^c \subseteq P^c$ se concluye que

$$(B \cap A^c) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B \cap A^c)^c \Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$$

(1.0 pto.)

a2) Por demostrar que $(B-A) \subseteq C \Rightarrow (D-C) \subseteq (D-B) \cup A$.

Observar que: $(D-C) \subseteq (D-B) \cup A \Leftrightarrow (D \cap C^c) \subseteq (D \cap B^c) \cup A$

$$\Leftrightarrow (D \cap C^c) \subseteq (D \cup A) \cap (B^c \cup A)$$

(1.5 ptos.)

En efecto, por hipótesis (según a1) $C^c \subseteq (B^c \cap A)$ y $D \subseteq (D \cup A)$ Propiedad evidente.

Por propiedad vista $P \subseteq Q \wedge R \subseteq S \Rightarrow (P \cap R) \subseteq (Q \cap S)$ se concluye que

$(D \cap C^c) \subseteq [(D \cup A) \cap (B^c \cup A)]$ (1.5 ptos.)

b) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

$\Leftarrow$ Es inmediato que si $B \subseteq A \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \cup B = A \wedge A \cap C = A$ por lo tanto $A \cup B = A \cap C$

(0.5 ptos.)

$\Rightarrow A \subseteq (A \cup C) \Leftrightarrow A \subseteq (A \cap C) \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$B \subseteq (A \cup B) \Leftrightarrow B \subseteq (A \cap C) \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C$ (1.5 ptos.)

Observación: La parte (b) también puede resolverse por elementos

Sea $x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subseteq A$ etc.

CONTROL 1 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1
PROBLEMA 3

a) i) $\Psi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E \end{cases}$ pero $(\forall x)/(x \in E)$ entonces $\Psi_E(x) = 1$ para todo x

(0.5 ptos.)

$\Psi_\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \phi \\ 0 \text{ si } x \notin \phi \end{cases}$ pero $(\forall x)(x \notin \phi)$ entonces $\Psi_\phi(x) = 0$ para todo x

(0.5 ptos.)

ii) Por demostrar que $(\forall x \in E)\Psi_{A\cap B}(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$.

En efecto, si $x \in (A \cap B), \Psi_{A\cap B}(x) = 1$ y

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \Psi_A(x) = 1 \wedge \Psi_B(x) = 1$$

De modo que $\Psi_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \cdot 1 = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$ (0.5 ptos.)

Si $x \notin (A \cap B), \Psi_{A\cap B}(x) = 0$ y $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$.

En cualquier caso $\Psi_A \cdot \Psi_B = 0 \cdot 1, \Psi_A\Psi_B = 1 \cdot 0, \Psi_A\Psi_B = 0 \cdot 0$

Así, si $x \notin A \cap B$ $\Psi_{A\cap B}(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x) = 0$ (0.5 ptos.)

iii) Por dem que $C \subseteq D \Leftrightarrow (\forall x \in E)\Psi_c(x) \leq \Psi_D(x)$.

$(\Rightarrow)$ Si $\Psi_c(x) = 1 \Rightarrow x \in C \overset{h.p}{\Rightarrow} x \in D \Rightarrow \Psi_D(x) = 1$ por lo tanto $\Psi_c(x) \leq \Psi_D(x)$

Si $\Psi_c(x) = 0$ es inmediato que $0 = \Psi_c(x) \leq \Psi_D(x) \in \{0, 1\}$ (0.5 ptos.)

$(\Leftarrow)$ Sea $x \in C \Rightarrow \Psi_c(x) = 1 \leq \Psi_D(x) \Rightarrow \Psi_D(x) = 1 \Rightarrow x \in D$ por lo tanto $C \subseteq D$(0.5 ptos.)

b)

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F} \\ A &\longrightarrow \lambda(A) = \Psi_A \end{aligned}$$

con $\mathcal{F} = \{f : E \to \{0, 1\}/f$ es función$\}$

Inyectividad: Por demostrar que $\lambda(A) = \lambda(B) \Rightarrow A = B$

Sean $A, B \in \mathcal{P}_{(E)}$ tales que $\lambda(A) = \lambda(B) \Rightarrow \Psi_A(x) = \Psi_B(x) \quad \forall x \in E$.

Si $x \in A \Rightarrow \Psi_A(x) = 1 = \Psi_B(x) \Rightarrow x \in B$ es decir $A \subseteq B$ (0.7 ptos.)

Si $x \notin A \Rightarrow x \in A^c \Rightarrow \Psi_A(x) = 0 = \Psi_B(x) \Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \in B^c$.

Entonces $A^c \subseteq B^c \Leftrightarrow B \subseteq A$

Así $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (0.8 ptos.)

Epiyectividad (sobreyectividad)

Por demostrar que $(\forall f \in \mathcal{F})(\exists A \in \mathcal{P}_{(E)})\lambda(A) = f$.

En efecto, como $f \in \mathcal{F}, f : E \to \{0,1\}$ (f no identicamente nula) entonces $\exists A \subseteq E, A \neq \phi$, tal que $(\forall x \in A) f(x) = 1$.

Es decir $f = \Psi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ por lo tanto $\exists A \in \mathcal{P}_{(E)}; f = \Psi_A = \lambda(A)$ (1.0 pto.)

Particularmente si $f(x) = 0 \ \ \forall x \in E, \exists \phi \in \mathcal{P}_{(E)}$ tal que $f = \Psi_\phi = \lambda(\phi)$ (0.5 ptos.)