MA-11A Algebra **25 de Mayo, 2000**

Pauta Control No. 2

PROBLEMA 1:

(i).- Se pide probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 6 divide a $n(n+1)(n+2)$.

Si $n = 0$, entonces $n(n+1)(n+2) = 0$ que es divisible por 6, luego se verifica la propiedad. Supongamos que la propiedad se cumple para n y veamos que se verifica para $n+1$. En efecto,

$$(n+1)(n+2)(n+3) \;=\; n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)\,.$$

Por hipótesis inductiva $n(n+1)(n+2)$ es divisible por 6. Luego, para obtener la conclusión deseada bastará mostrar que $3n(n+1)$ es divisible por 6, o equivalentemente que $n(n+1)$ es divisible por 2.

Hay dos formas de verificar que $n(n+1)$ es divisible por 2.

- **Primera Forma**: Basta notar que si n es par, entonces $n(n+1)$ es divisible por 2, y si n es impar, entonces $n+1$ es par y por lo tanto nuevamente $n(n+1)$ es divisible por 2.
- **Segunda Forma**: Por inducción. Si $n = 0$, entonces $n(n+1) = 0$ que es divisible por 2, luego se verifica la propiedad. Supongamos que la propiedad se cumple para n y veamos que se verifica para $n+1$. En efecto,

  $$(n+1)(n+2) \quad = \quad n(n+1) + 2(n+1)\,.$$

  Por hipótesis inductiva y dado que $2(n+1)$ es divisible por 2 cualquiera sea n, se concluye la inducción.

(ii.1).- Debemos probar que $\mathcal{R}$ es relación refleja, antisimétrica y transitiva. Hay dos formas de hacerlo.

- **Primera Forma**: Observar que para cualquier entero m se tiene que $2m \equiv_2 0$ o equivalentemente $3m \equiv_2 m$. Luego,

  $$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a+b \equiv_2 c+d\,.$$

  Además, sabemos que $\equiv_2$ es una relación de equivalencia.

  - REFLEXIVIDAD: Hay que probar que para todo $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$. Pero esto es obvio puesto que $a+b \equiv_2 a+b$.
  - SIMETRÍA: Hay que probar que para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ implica que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$. Como $a+b \equiv_2 c+d$ implica que $c+d \equiv_2 a+b$ se tiene la conclusión deseada.
  - TRANSITIVIDAD: Hay que probar que para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ implican que $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. Como $a+b \equiv_2 c+d$ y $c+d \equiv_2 e+f$ implican que $a+b \equiv_2 e+f$ se tiene la conclusión desea.

- **Segunda Forma**: Observar que

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a+b-c-3d = 2k\,.$$

  - REFLEXIVIDAD: Hay que probar que para todo $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$. Pero esto es obvio puesto que $a+b-a-3b=-2b$ luego si $k=-b \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a+b-c-3d=2k$.
  - SIMETRÍA: Hay que probar que para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ implica que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
    Si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$, entonces existe un $k' \in \mathbb{Z}$ tal que $a+b-c-3d=2k'$. Sigue que, $c+d-a-3b=(c+3d-a-b)-2d-2b=2(-k'-d-b)$. Luego, para $k=-k'-d-b \in \mathbb{Z}$ se tiene que $c+d-a-3b=2k$, i.e., $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
  - TRANSITIVIDAD: Hay que probar que para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ implican que $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$.
    Si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$, entonces existen k,k' tales que $a+b-c-3d=2k'$ y $c+d-e-3f=2k''$. Sigue que, $a+b-e-3f=(2k'+c+3d)+(2k''-c-d)=2(k'+d+k'')$. Luego, para $k=k'+d+k'' \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a+b-e-3f=2k$, i.e., $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

(ii.2).- Observar que $(a,b) \in [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ sí y sólo si $a+b \equiv_2 0$, i.e., cuando $a+b$ es par. Análogamente, $(a,b) \in [(1,0)]_{\mathcal{R}}$ sí y sólo si $a+b \equiv_2 1$, i.e., cuando $a+b$ es impar.

Sigue que, si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, entonces $(a,b) \in [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ si $a+b$ es par y $(a,b) \in [(1,0)]_{\mathcal{R}}$ si $a+b$ es impar. Luego, $\mathbb{Z}^2 \subseteq [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$. La otra inclusión es obvia. Luego, $\mathbb{Z}^2 = [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

Por otro lado, si $(a,b) \in [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}}$, entonces $a+b$ es par e impar, lo que es imposible. Luego, $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$,

PROBLEMA 2:

(i).- Conviene observar que por definición de $\mathcal{R}$ se tiene que $a\mathcal{R}c$ sí existe una secuencia de elementos $b_0,\ldots,b_{n+1} \in E$ tal que el primero de ellos es igual a a, el último es igual a c, y dos elementos sucesivos están $\mathcal{S}$-relacionados, i.e., $b_i\mathcal{S}b_{i+1}$.

REFLEXIVIDAD: Hay que probar que para todo $a \in E$, se tiene que $a\mathcal{R}a$. En efecto, sea $n=0$, $b_0=a$, $b_{n+1}=a$, entonces como $\mathcal{S}$ es refleja, $b_0\mathcal{S}b_{n+1}$ ($\exists n=0 \in \mathbb{N}, \exists b_0,\ldots,b_{n+1} \in E$, tal que $b_0=a$, $b_{n+1}=a$ y $b_i\mathcal{S}b_{i+1}$, $\forall i \in \{0,\ldots,n\}$). En otras palabras, $a\mathcal{R}a$.

TRANSITIVIDAD: Hay que probar que para todo $a,c,e \in E$, se tiene que $a\mathcal{R}c$ y $c\mathcal{R}e$ implican que $a\mathcal{R}c$. La idea de la demostración se basa en que si $a\mathcal{R}c$ y $c\mathcal{R}e$, entonces existen secuencias de elementos en E que van de a a c y de c a e tales que elementos sucesivos están $\mathcal{S}$-relacionados. Pegando ambas secuencias se obtiene otra secuencia de elementos $\mathcal{S}$-relacionados que va de a a e. Esto último implica que $a\mathcal{R}e$. Formalmente, si $a\mathcal{R}c$ y $c\mathcal{R}e$, entonces $\exists n,m \in \mathbb{N}, \exists b_0,\ldots,b_{n+1},d_0,\ldots,d_{m+1} \in E$, tal que $b_0=a$, $b_{n+1}=c=d_0$, $d_m=e$, $b_i\mathcal{S}b_{i+1}$, $\forall i \in \{0,\ldots,n\}$, y $d_j\mathcal{S}d_{j+1}$, $\forall j \in \{0,\ldots,m\}$. Luego, se pueden pegar las secuencias de b_i y de d_j (puesto que $b_{n+1}=c=d_0$) de forma de obtener una secuencia de elementos de E de largo $n+m+1$ donde el primero de ellos es igual a a, el último es igual a e, y dos elementos sucesivos están $\mathcal{S}$-relacionados ($\exists N=n+m$, y b'_i, $i \in \{0,\ldots,N\}$, donde $b'_i=b_i$ si $i \in \{0,\ldots,n\}$, y $b'_i=d_{i-n}$ si $i \in \{n,\ldots,N\}$ — notar que no hay ambigüedad en la definición de b'_i en el caso que $i=n$ pues $b_n=c=d_0$. Además, $b'_0=a$, $b'_N=e$, y $b'_i\mathcal{S}b'_{i+1}$, $\forall i \in \{0,\ldots,N\}$). En otras palabras, $a\mathcal{R}e$.

(ii).- Hay varias formas distintas de resolver esta parte. Veremos tres de ellas.

- **Primera Forma**: Sea $C_n = \{x \in [0,+\infty) \,:\, x^n \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Como cada $m \in \mathbb{N}$ tiene una única raíz n–ésima real positiva $\sqrt[n]{m}$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sigue que
$$C_n \;=\; \{\sqrt[n]{m} \,:\, m \in \mathbb{N}\}\,.$$
Luego, $|C_n| = |\mathbb{N}|$, i.e., C_n es numerable. Como $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ y unión numerable de numerables es numerable, entonces C es numerable.

- **Segunda Forma**: Sea $C_m = \{x \in [0,+\infty) \,:\, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n = m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Como cada $m \in \mathbb{N}$ tiene una única raíz n–ésima real positiva $\sqrt[n]{m}$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sigue que
$$C_m \;=\; \{\sqrt[n]{m} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}\,.$$
Luego, $|C_m| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}| \leq |\mathbb{N}|$, i.e., C_m es numerable. Como $C = \bigcup_{m=0}^{\infty} C_m$ y unión numerable de numerables es numerable, entonces C es numerable.

- **Tercera Forma**: Para probar que C es numerable observamos que cada $m \in \mathbb{N}$ tiene una única raíz n–ésima real positiva $\sqrt[n]{m}$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Luego, podemos construir una tabla de doble entrada como se muestra en la Fig. 1

n/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots$
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	0	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$					
3	0	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$						
4	0	$\sqrt[4]{1}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{3}$							
5	0	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt[5]{2}$								
6	0	$\sqrt[6]{1}$									
7	0										
8	0										
9	0										
$\vdots$	0										

Figura 1:

Recorriendo la tabla en diagonal eliminando los términos repetidos obtenemos la tabla de doble entrada que se muestra en la Fig. 2. Todos los elementos de C aparecen una única vez en la tabla de la Fig. 2. Para probar que C es numerable anotamos en la segunda tabla de doble entrada todos los valores de $\mathbb{N}$ de manera diagonal, saltándonos las posiciones que no contienen elementos de C. La biyección es la función que asigna a cada natural el elemento de C correspondiente a su ubicación en la tabla.

Problema 3:

(i).- Dado que $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$, se tiene que,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \;=\; \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k\,.$$

n/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	*	*	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	*	$\sqrt{5}$					
3	*	*	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$						
4	*	*	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{3}$							
5	*	*	$\sqrt[5]{2}$								
6	*	*									
7	*										
8	*										
9	*										
$\vdots$	*										

Figura 2:

Haciendo el cambio de variable $i = k + 1$, nos queda que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{i-1} = -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i - 1 \right).$$

Ya sea porque $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i = 0$ es una fórmula conocida o porque aplicando el Teorema del Binomio se verifica que $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i = (1-1)^{n+1} = 0$, se concluye que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(ii).- Si $n = 1$, entonces $H_n = 1$ y $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^1}{1} = -1$. Luego, la igualdad deseada se verifica. Supongamos que la igualdad se cumple para n y verifiquemos que se tiene para $n+1$. En efecto, observando que la indicación es aplicable a los coeficientes binomiales que aparecen en la sumatoria $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{k}$ salvo el correspondiente a $k = n + 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva la primera sumatoria es igual a $-H_n$. Haciendo el cambio de variable $i = k-1$ en la segunda sumatoria nos queda que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{k} = -H_n + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -H_n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1}.$$

Por (i) sabemos que la última sumatoria es igual a $-1/(n+1)$ y como $-H_n - 1/(n+1) = -H_{n+1}$ se completa la inducción.